

Квантовая информация и квантовая оптика. Лекция 2.

С.П.Кулик (кафедра квантовой электроники)

Часть 3. Перепутанные состояния.

Использование световых сигналов закономерно вызывает интерес при решении проблемы передачи квантовой информации. Оказывается, что определенные типы световых полей обладают рядом свойств, которые непосредственно используются в квантовых коммуникационных протоколах, например, таких как квантовая телепортация и квантовое распределение ключа (квантовая криптография). Такие поля рассматриваются как квантовые системы – их измерение, вообще говоря, приводит к возмущению состояния. Вообще, под неклассическим понимается свет, свойства которого нельзя описать классическим образом. Поэтому возникает вопрос качественного и количественного описания квантового излучения и выделения его отличительных признаков. Особенно полезно выделить т.н. операциональные критерии, которые можно было бы применить в эксперименте. Эти (и другие) проблемы составляют предмет *квантовой оптики*.

С точки зрения эксперимента, свойства световых полей можно исследовать, анализируя свойства фототока, порождаемых ими. При этом логично анализировать как средний ток, так и его флуктуации. Известно, что средний ток пропорционален интенсивности света, падающего на фотодетектор. Флуктуации фототока можно объяснить случайностью рождения фотоэлектронов в процессе детектирования (фотоэффекта), поэтому долгое время им не придавали существенного значения. Такие флуктуации называют пуассоновскими или *дробовым шумом*. Имеются соотношения и критерии, которые устанавливают связи между наблюдаемыми характеристиками (средним значением, дисперсией и высшими моментами) фототока и статистическими свойствами света.

Здесь мы рассмотрим важный класс неклассических состояний (в том числе, света), которые называются перепутанными состояниями (ПС). Далее будет показана работа одного из протоколов квантовой информации на основе ПС – т.н. квантовая телепортация кубитов.

Нами уже были рассмотрены некоторые одно-кубитовые ЛЭ. В квантовой информации принципиальное значение имеют также двух-кубитовые логические операции и соответствующие им ЛЭ.

В классической информации известны следующие двухбитовые ЛО: И (AND), ИЛИ (OR), НЕ (NOT) и их комбинации, например, И-НЕ, ИЛИ-НЕ. Например, рассмотрим: двухбитовую операцию “Сложение по модулю 2” - операция «исключающего ИЛИ», или XOR (таблица 1).

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Таблица 1. Операция XOR.

Видно, что операция XOR является необратимой, в том смысле, что $F(F(a)) \neq a$. Логические необратимые операции не очень полезны в квантовой информации. Однако операция XOR может быть сделана обратимой, если сохранять в памяти входной сигнал. В этом случае ее называют CNOT (controlled NOT). Схема соответствующего ЛЭ изображена на рис.1.

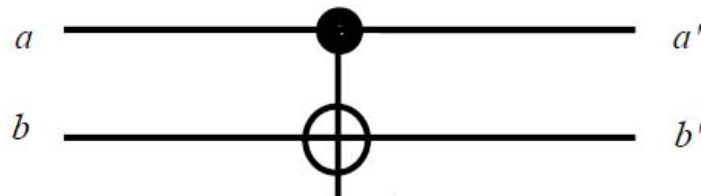


Рис.1. Схематичное изображение ЛЭ CNOT в квантовой теории информации.

Соответствующая таблица истинности (таблица 2) читается так: сохраняем значение (ку)бита a , в то время как (ку)бит b меняется по закону XOR. Другими словами, бит b (target) меняет свое состояние тогда и только тогда, когда состояние контрольного (control) бита a соответствует 1; при этом, состояние контрольного бита не меняется.

a	b	a'	b'
0	0	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
1	1	1	0

Таблица 2. Двухкубитовая ЛО CNOT.

Видно, что теперь $F = F^{-1}$, в том смысле, что, подействовав на входные данные два раза по одному и тому же алгоритму, мы опять получаем входные данные:

$$F(F(X)) = X, \text{ или } F(Y) = X \quad (1)$$

Пример: Сложение по модулю 2, с сохранением a (таблица 3).

$$(a, b) \xrightarrow{CNOT} (a, a \oplus b) \quad (2)$$

$$(a, a \oplus b) \xrightarrow{CNOT} (a, a \oplus b \oplus a) = (a, b) \quad (3)$$

a	b	$a \oplus b$	$a \oplus b \oplus a$
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	0	1

Таблица 3. Повторное применение операции CNOT.

Мы уже рассматривали доказательство теоремы о запрете клонирования неизвестных квантовых состояний. Проиллюстрируем это еще раз на примере квантовой ЛО CNOT. При этом мы покажем, что в результате действия CNOT могут возникать специфические состояния двух кубитов, которым нет аналога в классических вычислениях.

Мы условились, что в общем случае под квантовыми данными (кубитами) мы понимаем суперпозицию вида

$$|X\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (4)$$

где α и β - комплексные числа или амплитуды состояний, причем, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Согласно таблице истинности, если CNOT применить к булевым данным, в которых второй бит (b) находится в состоянии “0”, а первый (a) - в произвольном состоянии “X”, то первый бит не изменяется, а второй становится его копией: $U_{CNOT}(X, 0) = (X, X)$, где X = “0” или “1”.

В квантовом случае, в качестве данных, обозначенных символом “X”, нужно рассматривать суперпозицию $|X\rangle$ (4):

$$U_{CNOT}|X, 0\rangle = |X, X\rangle. \quad (5)$$

Физически, данные можно закодировать, например, в поляризационном базисе $|V\rangle = 1$, $|H\rangle = 0$: $U_{CNOT}|0, 0\rangle = |0, 0\rangle$ и $U_{CNOT}|1, 0\rangle = |1, 1\rangle$.

В этом случае, действительно, имеет место копирование состояния. Однако теорема о запрете клонирования утверждает, что невозможно копирование произвольного квантового состояния. В рассмотренном примере копирование произошло, поскольку операция производилась в собственном базисе ($|0\rangle$, $|1\rangle$), т.е. в частном случае квантового состояния.

Казалось бы, что операцию CNOT можно использовать и для копирования суперпозиций двух булевых состояний, таких как $|S\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$:

$$U_{CNOT} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |0\rangle + |1\rangle \}, 0 \right\rangle \xrightarrow{?} \frac{1}{2} \{ |0\rangle + |1\rangle \}, \{ |0\rangle + |1\rangle \}. \quad (6)$$

Однако, это не так. Унитарность квантовой эволюции требует, чтобы суперпозиция входных состояний преобразовывалась в соответствующую суперпозицию выходных состояний:

$$U_{CNOT} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |0\rangle + |1\rangle \}, |0\rangle \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle \} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |0, 0\rangle + |1, 1\rangle \} \neq \frac{1}{2} \{ |0\rangle + |1\rangle \}, \{ |0\rangle + |1\rangle \}.$$

Видно, что состояние, возникшее в результате действия CNOT, не является копией входного. Это т.н. *перепутанное состояние*, в котором каждый из двух выходных кубитов не имеет определенного значения (например, поляризации), а состояние системы нельзя записать в виде произведения двух ВФ: $|\Psi_{12}\rangle \neq |\Psi_1\rangle |\Psi_2\rangle$. Этот пример показывает, что логические операции, выполняемые над квантовыми объектами, происходят по другим правилам, нежели в классических вычислительных процессах. Как уже упоминалось выше, в

этой связи огромное значение приобретают состояния (например, света), которые не имеют аналогов в классическом мире. Ярким представителем таких состояний являются перепутанные состояния.

Впервые понятие «перепутанных» состояний было введено Э.Шредингером в его работе от 29 ноября 1935 г. «Современное состояние квантовой механики». Известно, что появление этой статья было вызвано работой А.Эйнштейна, Б.Подольского и Н.Розена «Может ли квантово-механическое описание реальности быть полным?» (15 мая 1935 г.) с дополнением, написанным Н.Бором. Русскоязычный перевод статьи Э.Шредингера появился в журнале «Успехи химии» в 1936 г. Соответственно, первое упоминание термина «перепутанные состояния» на русском языке относится к этому переводу, поэтому будем использовать именно этот термин, следуя хронологическим соображениям¹. Шредингер ввел понятие перепутанных состояний для описания состояния составной системы, которая состоит из нескольких частей, причем части общей системы могут быть пространственно разнесены.

Рассмотрим источник, испускающий пары частиц так, что одна из них (присвоим ей индекс 1) летит налево, а другая (индекс 2) – направо (рис.2). Потребуем, чтобы сохранялась сумма импульсов частиц. Каждая частица может полететь и вверх (назовем это состоянием $|0\rangle$) и вниз ($|1\rangle$). Но всякий раз сумма импульсов сохраняется. Если первая частица полетела налево вниз, то вторая полетит направо вверх. Или если первая частица полетела налево вверх, то вторая - направо вниз.

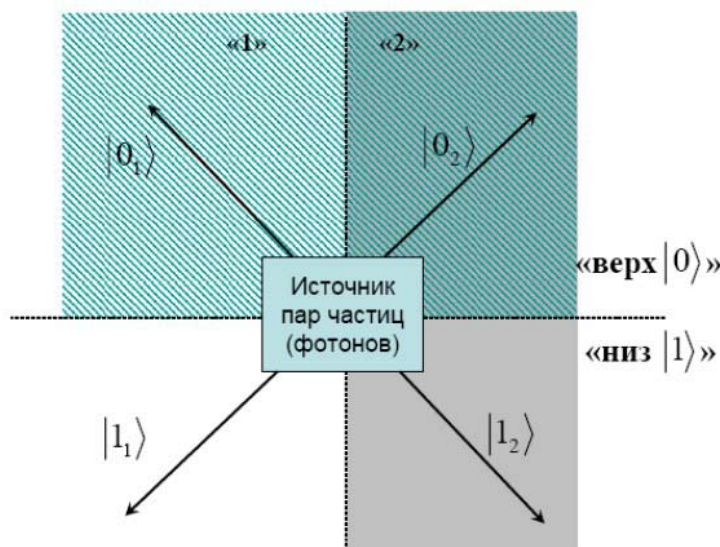


Рис.2. Схематичное представление генерации перепутанных состояний пары частиц. Источник излучает пару частиц «1», «2», которые могут «полететь» либо вверх, либо вниз. Причем, если первая частица полетела вверх, вторая – обязательно вниз и наоборот. Таким образом, каждая частица может оказаться в состоянии либо $|0\rangle$ (наклонная штриховка), либо $|1\rangle$ в верхней или нижней полуплоскости.

¹ Встречаются также термины «запутанные», «сцепленные», «переплетенные», которые ничем не лучше «перепутанных». В немецком языке термин «Verschränkung», использованный Шредингером, обозначает сильное переплетение, как при крепком рукопожатии. Английский перевод «entangled states» тоже вряд ли стоит считать удачным, поскольку в нем потерян первоначальный смысл «крепкого рукопожатия».

Полное состояние, которое приготавливает источник, записывается в виде суперпозиции двух “возможностей”:

$$|\Psi_{12}\rangle = \alpha|0\rangle_1|1\rangle_2 + \beta|1\rangle_1|0\rangle_2. \quad (7)$$

Коэффициенты α и β - это (комплексные) амплитуды двух “альтернатив”. Их физический смысл состоит в том, что соответствующие квадраты модулей $|\alpha|^2$ и $|\beta|^2$ определяют вероятности обнаружить пару частиц в состояниях $|0\rangle_1|1\rangle_2$, либо $|1\rangle_1|0\rangle_2$. Состояние (7) - пример перепутанного состояния двух частиц. Позже будет дано четкое определение таких состояний и рассмотрены количественные меры перепутывания. Бывают разные типы перепутанных состояний, которые возникают на ионах в ловушках, ядерных спинах в молекуле при электронном парамагнитном резонансе. Встречаются перепутанные состояния атом-поле в резонаторе и многие другие.

Говоря о перепутанных состояниях, мы, таким образом, выделяем следующие их атрибуты:

- наличие параметра, принимающего ряд фиксированных значений для каждой из подсистем;

- наличие корреляций между двумя подсистемами по этому параметру, или, в более общем случае, - синхронности флуктуаций этого параметра;

Сформулируем еще одно определение перепутанных состояний для двух подсистем:

Перепутанными называются две подсистемы, между которыми существуют квантовые корреляции по параметру, принимающему, по крайней мере, два значения для каждой из подсистем. Измерение состояния одной из подсистем однозначно определяет (проецирует) состояние другой. Совместное состояние двух подсистем тогда называется перепутанным.

При этом корреляции должны носить квантовый характер, т.е. их нельзя описать классически. В противном (классическом) случае даже полные (т.е. 100%-ые) корреляции не дают результатов, к которым ведет использование истинных перепутанных состояний - например, нарушение **неравенств Белла**.

Очень важными в квантовой информации являются т.н. **состояния Белла**:

$$|\Psi_{12}^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle_1|1\rangle_2 - |1\rangle_1|0\rangle_2], \quad (8a)$$

$$|\Psi_{12}^{(+)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2], \quad (8б)$$

$$|\Phi_{12}^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle_1|0\rangle_2 - |1\rangle_1|1\rangle_2], \quad (8в)$$

$$|\Phi_{12}^{(+)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2]. \quad (8г)$$

Они образуют ортонормированный базис, по которому можно разложить любое чистое состояние пары частиц. Отмеченный выше признак ПС – квантовый характер корреляции - можно проиллюстрировать следующим образом. Рассмотрим т.н. синглетное (или

антисимметричное) состояние Белла (8а). Оно имеет такое название, поскольку меняет знак при перестановке индексов подсистем: легко в этом убедиться, поменяв местами индексы $1 \leftrightarrow 2$:

$$|\Psi_{12}^{(-)}\rangle \rightarrow -|\Psi_{21}^{(-)}\rangle. \quad (9)$$

Несложно показать, что антисимметричное состояние (8а) инвариантно относительно вращений. При произвольном повороте базиса преобразование векторов определяется элементами эрмитовой матрицы:

$$D = \begin{pmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix}, \quad |t|^2 + |r|^2 = 1. \quad (10)$$

Тогда компоненты базисов преобразуются по правилам:

$$\begin{aligned} |0\rangle &= t|0'\rangle + r|1'\rangle, \\ |1\rangle &= -r^*|0'\rangle + t^*|1'\rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив эти выражения в (8а), получим:

$$\begin{aligned} |\Psi_{12}^{(-)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle_1|1\rangle_2 - |0\rangle_2|1\rangle_1] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(t|0'\rangle_1 + r|1'\rangle_1)(-r^*|0'\rangle_2 + t^*|1'\rangle_2) - (-r^*|0'\rangle_1 + t^*|1'\rangle_1)(t|0'\rangle_2 + r|1'\rangle_2)] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-r^*t|0'\rangle_1|0'\rangle_2 + |t|^2|0'\rangle_1|1'\rangle_2 - |r|^2|1'\rangle_1|0'\rangle_2 + rt^*|1'\rangle_1|1'\rangle_2] + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}[r^*t|0'\rangle_1|0'\rangle_2 + |r|^2|0'\rangle_1|1'\rangle_2 - |t|^2|1'\rangle_1|0'\rangle_2 - rt^*|1'\rangle_1|1'\rangle_2] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|0'\rangle_1|1'\rangle_2 - |1'\rangle_1|0'\rangle_2]. \end{aligned} \quad (12)$$

Т.о. синглетное состояние (8а) инвариантно при произвольных преобразованиях базиса. Например, это состояние имеет один и тот же вид независимо от того, какая ось используется для определения поляризации фотонов. Пусть состояния $|H\rangle$ и $|V\rangle$ обозначают фотоны с горизонтальной и вертикальной поляризациями, а $|+45\rangle$ и $|-45\rangle$ - базисные состояния фотонов в базисе, повернутом на 45° . Тогда поляризационное синглетное состояние Белла имеет вид

$$|\Psi_{12}^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|H\rangle_1|V\rangle_2 - |V\rangle_1|H\rangle_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+45\rangle_1|-45\rangle_2 - |-45\rangle_1|+45\rangle_2] \quad (13)$$

Аналогично можно записать синглетное состояние спинов двух электронов с противоположно направленными спинами. Мы можем рассматривать проекции спинов как на вертикальную, так и на горизонтальную оси, но вид состояния остается неизменным:

$$|\Psi_{12}^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\rightarrow_1\rangle|\leftarrow_2\rangle - |\leftarrow_1\rangle|\rightarrow_2\rangle]. \quad (14)$$

Итак, по определению, (чистыми) перепутанными состояниями называются состояния составной системы, которые не могут быть представлены в виде произведения волновых

функций, описывающих ее части по отдельности. Так, для двухкомпонентной системы перепутанное состояние:

$$|\Psi_{12}\rangle \neq |\Psi_1\rangle |\Psi_2\rangle \quad (15)$$

Перепутанные состояния замечательны тем, что при проецировании одной части системы в одно из двух возможных состояний, другая часть как бы «мгновенно» приобретает определенное значение, несмотря на то, что она могла быть удалена на произвольное расстояние. Этот факт и был основной причиной, побудившей Эйнштейна к переосмыслению основных положений квантовой механики.

Перед тем как перейти к обсуждению реализации и физических свойств ПС, отметим важное свойство ПС. Оно состоит в том, что для чистых перепутанных состояний полное знание состояния составной системы не предполагает полного знания состояний подсистем. Более того, максимальная степень перепутывания двухкомпонентных ПС предполагает полную неопределенность состояний подсистем. Т.е. иногда вообще бессмысленно говорить о ВФ подсистем, поскольку они представляют собой некогерентную смесь, - их можно описать классически в терминах статистической физики. Например, рассмотрим другое поляризационное состояние Белла

$$|\Psi_{12}^{(+)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_1\rangle|V_2\rangle + |V_1\rangle|H_2\rangle). \quad (16)$$

Кроме ВФ в квантовой механике вводится другая более общая характеристика состояний – т.н. матрица плотности. Для чистых состояний (описываемых ВФ $|\Psi_{12}\rangle$), матрица плотности по определению равна

$$\rho = |\Psi_{12}\rangle \langle \Psi_{12}|. \quad (17)$$

По правилам квантовой механики, чтобы найти матрицу плотности какой-нибудь подсистемы, надо взять след по индексам другой системы от совместной матрицы плотности:

$$\rho_2 = Sp_1(\rho_{12}) = Sp_1(|\Psi_{12}\rangle \langle \Psi_{12}|) \quad (18)$$

Тогда для состояния (16) получаем:

$$\begin{aligned} |\Psi_{12}\rangle \langle \Psi_{12}| &= \frac{1}{2} \{ (|H_1\rangle|V_2\rangle + |V_1\rangle|H_2\rangle) \otimes (\langle V_2|\langle H_1| + \langle H_2|\langle V_1|) \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ |H_1\rangle|V_2\rangle \otimes \langle V_2|\langle H_1| + |H_1\rangle|V_2\rangle \otimes \langle H_2|\langle V_1| + \\ &+ \frac{1}{2} \{ |V_1\rangle|H_2\rangle \otimes \langle V_2|\langle H_1| + |V_1\rangle|H_2\rangle \otimes \langle H_2|\langle V_1| \} \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда след этой матрицы по индексам «1» равен

$$\rho_2 = Sp_1(\rho_{12}) = \frac{1}{2} \{ |V_2\rangle \langle V_2| + |H_2\rangle \langle H_2| \}, \quad (20)$$

т.е. представляет собой равновзвешенную смесь. Следовательно, состояние второй подсистемы нельзя описывать волновой функцией; оно не является полностью определенным.

Мерой перепутывания выступает **энтропия состояния**. Вообще в физике энтропия характеризует неупорядоченность состояния. Интуитивно ясно, что состояния, описываемые ВФ, обладают нулевой энтропией – они «максимально хорошо» определены. В то же время смешанные состояния не описываются ВФ – их описание задается при помощи классических распределений вероятностей – с помощью матрицы плотности. Такие состояния обладают отличной от нуля энтропией, которая принимает максимальное значение для полностью смешанных состояний.

Замечание: энтропия фон Неймана определяется как

$$S = -\sum_{j=1}^D \lambda_j \log_2 \lambda_j, \quad (21)$$

где λ_j – собственные значения матрицы плотности, а D – размерность гильбертова пространства состояния. Например, для кубита $|S\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ матрица плотности согласно (17) имеет вид

$$\rho = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

а ее собственные значения равны 0 и 1. Соответственно, энтропия фон Неймана оказывается $S = 0$. Можно показать, что для максимально смешанного состояния кубита матрица плотности $\rho_s = \frac{1}{2}\{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, ее собственные значения вырождены и равны 0.5, следовательно, энтропия достигает максимума $S = -2 \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Говоря об экспериментальных реализациях ПС, выделим т.н. поляризационно-угловые ПС. Этот тип ПС является в настоящее время самым распространенным. В квантовой оптике известен эффект спонтанного параметрического рассеяния (СПР) света. Он состоит в том, что в определенных веществах с малой вероятностью (примерно 10^{-8}) фотон лазерной накачки распадается на пары фотонов, которые разлетаются под фиксированными углами по отношению к исходному фотону и имеют фиксированные частоты:

$$\vec{k}_p = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \text{ - закон сохранения импульса,} \quad (23)$$

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2 \text{ - закон сохранения энергии.} \quad (24)$$

Пара фотонов (их называют «сигнальным» и «холостым») излучаются под различными углами θ, θ' к волновому вектору накачки (см. рис.3).

Можно так построить оптическую схему, что для каждого из фотонов поляризация будет не определена, хотя имеются корреляции (перепутывание) между разными поляризациями. Для генерации таких состояний была предложена удобная схема (рис.4). В ней аналогичные состояния получались при интерференции бифотонов, рождающихся в двух последовательно расположенных кристаллах. В первом кристалле рождается состояние, в котором оба фотона

поляризованы горизонтально $|H_\theta H_{\theta'}\rangle$, а во втором кристалле – оба фотона поляризованы горизонтально $|V_\theta V_{\theta'}\rangle$. На выходе такой схемы генерируется ПС в виде суперпозиции

$$|\Psi\rangle = |H_\theta H_{\theta'}\rangle + \exp\{i\phi\} |V_\theta V_{\theta'}\rangle, \quad (25)$$

которое можно преобразовать к любому из четырех состояний Белла.

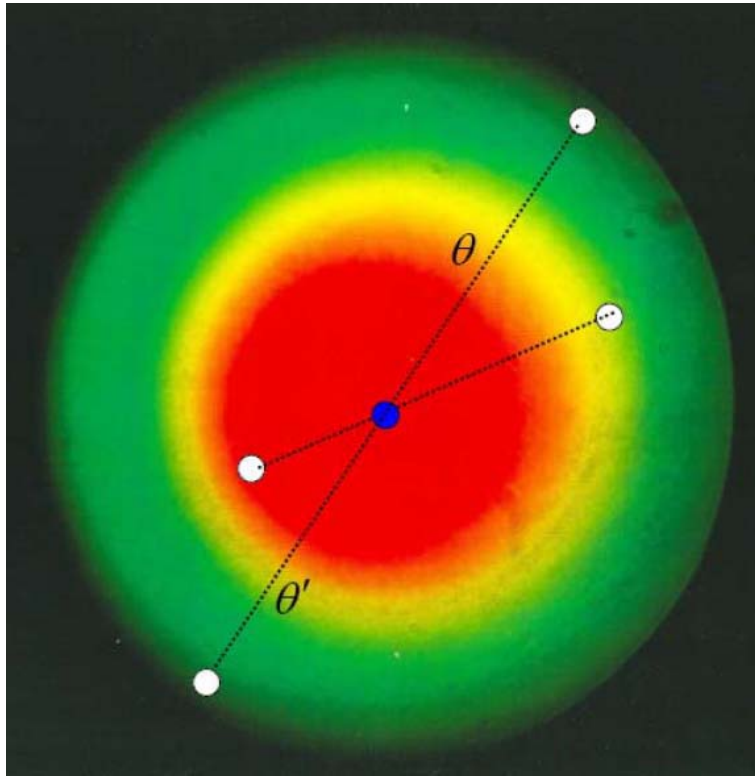


Рис.3. Фотография частотно-углового спектра спонтанного параметрического рассеяния света. Излучение распространяется навстречу в конусе углов. Линии соединяют моды, сопряженные по импульсу и энергии. Если один фотон летит вверх, то второй – вниз, если один летит вправо – другой влево. Углы разлета θ , θ' вычисляются из закона сохранения импульса (23)

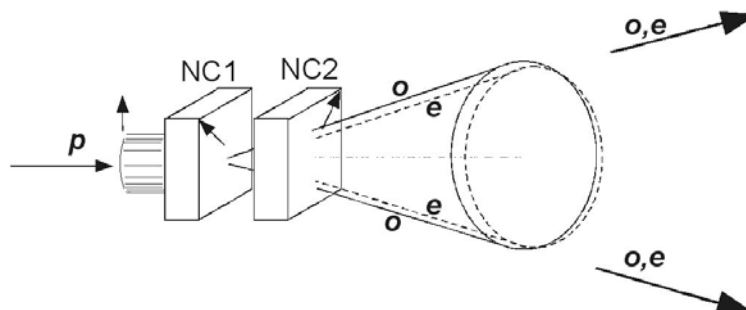


Рис.4. Схема генерации поляризационно-углового перепутанного состояния при помощи СПР в двух кристаллах (NC1,2), расположенных в общем пучке лазерной накачки (p).

Раньше мы говорили о кубитах и однокубитовых операциях. Перепутанные состояния представляют собой качественно иной ресурс квантовой информации, распределенный

между двумя и более пользователями. Такие ресурсы лежат в основе нескольких квантовых протоколов, например – в протоколах сверхплотного кодирования, квантовой телепортации, протоколе Экерта квантовой криптографии и многих других. В них речь идет о максимально перепутанных парах кубитов, которые распределены между излучателем и приемником, которые связаны между собой, в общем случае, и классическим и квантовым каналом связи. В качестве меры перепутывания иногда вводят величину «*nebit*» (*ebit*²) как количество перепутывания, содержащегося в максимально перепутанной паре двухуровневых систем, например, в паре частиц со спином 1/2, находящихся в синглетном состоянии:

$$|\Psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|0_1\rangle|1_2\rangle - |1_1\rangle|0_2\rangle\}. \quad (26)$$

Это позволяет ответить на вопрос, сколько пебитов необходимо для реализации того или иного протокола?

Заметим, что кубиты являются прямыми ресурсами канала связи. Они посылаются в определенном направлении (от источника к приемнику). В то же время пебиты относятся к косвенным ресурсам – они распределены между источником и приемником. Например, если Алиса приготовила две частицы в синглетном состоянии (26) и отправила одну частицу Бобу, то результат будет таким же, как если бы Боб приготовил две частицы в таком же состоянии и послал одну из них Алисе. В некотором смысле пебиты – более слабые ресурсы квантовой информации, чем кубиты, поскольку передача одного кубита может быть использована для создания одного пебита перепутывания. Однако распределение между пользователями одного или нескольких пебитов само по себе не достаточно для передачи произвольного состояния двухуровневой (квантовой) системы или кубита в любом направлении. Для осуществления такой передачи необходимо дополнить пебит битами классической информации, как это имеет место при квантовой телепортации.

² Адекватного перевода термина «ebit» на русский язык не существует. Имеющиеся варианты: “пебит” (от “перепутывание” и “бит”), забит (запутывание + бит), сцебит (сцепленность+ бит) и пр. несуразицы, вызванные неадекватным переводом термина, не имеющего устоявшегося русскоязычного аналога.

Часть 2. Квантовая телепортация кубитов.

“...телепортация - это мгновенная транспортировка кого(чего)-либо в пространстве посредством передовых технологий”
Teleportation is “..apparently instantaneous transportation of persons etc., across space by advanced technological means”
The Oxford English Dictionary, 2nd edition (Clarendon Press, Oxford, 1989), vol.XVII, p.730)

Будем различать два термина: **копирование** неизвестного квантового состояния и **передача** квантового состояния. Первый процесс запрещен соответствующей теоремой. Во втором - квантовое состояние уничтожается в одной пространственно-временной точке и появляется в другой точке. Тривиальной реализацией его служит передача состояния по каналу связи. Изощенной реализацией является квантовая телепортация.

1. Протокол квантовой телепортации

Под протоколом мы будем понимать последовательность манипуляций, приводящих к решению данной задачи. Итак, протокол квантовой телепортации содержит пять основных группы операций (рис.5):

1. Приготовление начального состояния частицы “1”. Это состояние представляет собой суперпозицию двух базисных (булевых) состояний

$$|\Psi_1\rangle = \alpha|0_1\rangle + \beta|1_1\rangle, \quad (1)$$

где комплексные амплитуды α и β связаны условием нормировки $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

2. Приготовление состояния Белла двух частиц “2” и “3”. Будем использовать синглетное состояние

$$|\Psi_{23}^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|0_2\rangle|1_3\rangle - |1_2\rangle|0_3\rangle\}. \quad (2)$$

3. Измерение состояний Белла двух частиц “1” и “2”. Другими словами, совместное состояние двух частиц “1” и “2” проектируется в базис состояний Белла $|\Psi_{12}^{(-)}\rangle, |\Psi_{12}^{(+)}\rangle, |\Phi_{12}^{(-)}\rangle, |\Phi_{12}^{(+)}\rangle$.

4. Передача (сообщение) результата измерений (2 бита классической информации) по классическому каналу.

5. Выполнение четырех унитарных преобразований над частицей “3” в соответствии с полученным сообщением³.

Традиционно принято считать, что третья группа операций выполняется участником протокола с именем Алиса, а пятая - Бобом⁴.

³ Пятая группа операций - выполнение унитарных преобразований - считается тривиальной. В случае поляризационных состояний света, использованных в этих преобразованиях, состоят в повороте двух или одной полуволновых пластин на разные углы.

⁴ Иногда присутствует и третий участник - с именем Виктор, сверяющий конечное и исходное состояния, и без имени - “ассистент”, помогающий Алисе приготовить ее состояние.

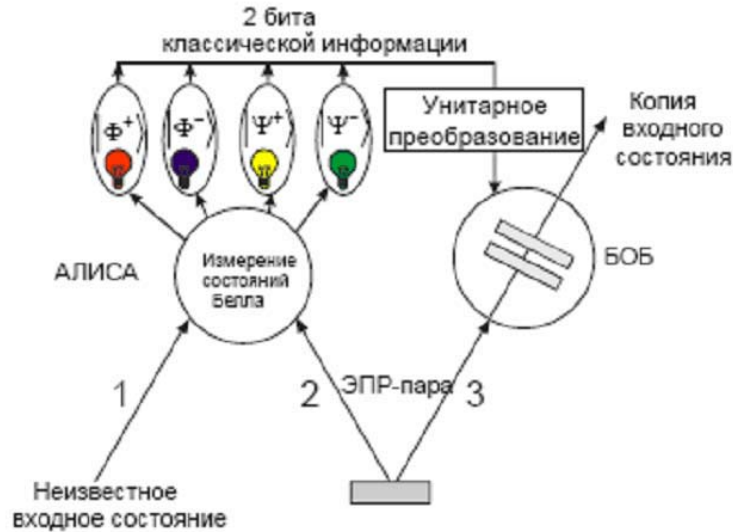


Рис.5. Схема, поясняющая протокол квантовой телепортации кубитов. Неизвестное состояние кубита подается в моду «1». В модах «2» и «3» создается заданное состояние Белла. Алиса выполняет измерение состояний Белла и сообщает результат (в виде, например, цвета лампы) Бобу. При этом частицы (фотоны) в модах «1» и «2» уничтожаются. Боб производит унитарное преобразование в соответствии с результатом измерения Алисы. На выходе возникает «копия» входного состояния.

Всю схему квантовой телепортации можно представить в виде двух станций - станции Алисы и станции Боба. Первая имеет два входа и один выход. На первый вход поступает частица «1» в состоянии (1), а на другой - половина перепутанной пары - частица «2». Выход Алисы подключен к классическому каналу связи, по которому передается четыре возможных исхода измерения состояний Белла⁵, т.е. 2 бита классической информации. Станция Боба также имеет два входа и один выход. На первый вход поступает информация, переданная Алисой по классическому каналу, а на второй - другая половинка перепутанной пары - частица «3». После выполнения Бобом трех унитарных преобразований частица «3» в скорректированном состоянии поступает на выход. При этом, как будет показано ниже, состояние частицы «3» на выходе станции Боба тождественно (является точной копией) неизвестного состояния частицы «1» - протокол КТ завершается.

Математически протокол КТ описывается предельно просто. Рассмотрим совместное состояние трех частиц до того, как две из них попали к Алисе:

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{123}\rangle &= |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_{23}\rangle = \\
 &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \{ |0_1\rangle |0_2\rangle |1_3\rangle - |0_1\rangle |1_2\rangle |0_3\rangle \} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \{ |1_1\rangle |0_2\rangle |1_3\rangle - |1_1\rangle |1_2\rangle |0_3\rangle \}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Прямые произведения состояний частиц «1» и «2» теперь выразим в терминах четырех состояний Белла $|\Psi_{12}^{(-)}\rangle, |\Psi_{12}^{(+)}\rangle, |\Phi_{12}^{(-)}\rangle, |\Phi_{12}^{(+)}\rangle$:

⁵ Состояния Белла образуют полный ортонормированный базис для любых двухчастичных состояний.

$$|\Psi_{123}\rangle = \frac{1}{2} [|\Psi_{12}^{(-)}\rangle (-\alpha|0_3\rangle - \beta|1_3\rangle) + |\Psi_{12}^{(+)}\rangle (-\alpha|0_3\rangle + \beta|1_3\rangle) + \\ + |\Phi_{12}^{(-)}\rangle (\beta|0_3\rangle + \alpha|1_3\rangle) + |\Phi_{12}^{(+)}\rangle (-\beta|0_3\rangle + \alpha|1_3\rangle)]. \quad (4)$$

Видно, что общее состояние трех частиц представляется суммой четырех слагаемых, каждое из которых факторизовано в отношении состояния Белла частиц “1” и “2” и состояния третьей частицы. Вероятность измерения того или иного состояния Белла из (4) равна 1/4. Таким образом, после измерения Алисы частица “3”, находящаяся в станции Боба, окажется спроецированной на одно из четырех состояний, фигурирующих в (4). Каждое из этих четырех возможных состояний частицы “3” связано линейным преобразованием с состоянием исходной частицы “1”:

$$-|\Psi_3^{(0)}\rangle \equiv -\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -I \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad -Z|\Psi_3^{(1)}\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \\ X|\Psi_3^{(2)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad -Y|\Psi_3^{(3)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Таким образом, получив информацию от Алисы, какое именно состояние Белла в данный момент она измерила (с вероятностью 1/4), Боб должен выполнить это преобразование, получив в итоге исходное. Причем, в одном из четырех случаев, как видно из (5), Бобу вообще не нужно ничего делать со своей частицей. Таким образом, становится понятно, что в результате КТ происходит расщепление информации о состоянии частицы “1”. Одна часть этой информации - результат измерения Алисы совместного состояния частиц “1” и “2” - передается по классическому каналу связи. Попросту говоря, это одно из четырех возможных закодированных сообщения, например, в цвете четырех ламп. Каждому состоянию Белла приписывается лампа определенного цвета, которая вспыхивает всякий раз, когда измеряется данное состояние. Боб, увидев вспышку определенного цвета (или получив эту информацию по телефону) выполняет соответствующее преобразование над своей частицей “3”, тем самым корректируя ее состояние. Подчеркнем, что эти преобразования являются унитарными, т.е. сохраняющими энергию - число частиц в протоколе КТ остается неизменным.

Другая часть информации - квантовая. Она заложена в полных корреляциях, существующих между частицами “2” и “3”, иными словами, в состоянии Белла, которое используется во второй группе операций протокола КТ (см. выше). Обратим внимание на некоторые особенности этого протокола.

■ Сформулированное выше требование о запрете клонирования неизвестного состояния выполняется. Исходное состояние, записанное на частице “1” уничтожается в результате измерения совместного состояния Белла частиц “1” и “2”.

■ Ни Алиса, ни Боб ничего не знают об исходном состоянии, поскольку владеют только частью полной информации - той, которая передается по классическому каналу.

■ На выходе станции Боба создается, в принципе, точная копия исходного состояния. Причем состояние это по-прежнему неизвестное.

■ Копирование происходит не мгновенно, а, по крайней мере, спустя время, которое нужно затратить на передачу классического сообщения от Алисы к Бобу.

Основная проблема при экспериментальной реализации квантовой телепортации с оптическими состояниями – выполнение измерений состояний Белла. Оказывается (и этот вывод строго доказывается в виде т.н. «no-go» теорем), что измерение состояний Белла нельзя выполнить, используя только линейные операции. А использование нелинейных процессов в оптике крайне неэффективно из-за малости соответствующих материальных характеристик (квадратичная восприимчивость)

На сегодняшний день протокол КТ неоднократно был продемонстрирован в эксперименте с оптическими состояниями и даже с массивными частицами. Необходимо заметить, что даже демонстрации представляют собой сложные эксперименты, выполняющиеся при использовании самой современной экспериментальной базы. На рис.6 показана схема оптической части установки по телепортации пары кубитов, в которой впервые было выполнено полное измерение состояний Белла. Регистрируемый сигнал был так слаб (несколько отсчетов за 10 часов), что накопление полезного сигнала шло около месяца. Только на настройку схемы для проведения измерений требовалась неделя, в течение которой проводились всевозможные тесты, такие как проверка максимального перепутывания используемых ПС, выравнивание оптических путей с точностью до долей длины волны (десятки нанометров). В частности, в схеме, показанной на рис.6, несколько интерферометров Маха-Цандера, причем некоторые из них вложены друг в друга, а максимальная длина плеча составляет несколько метров. Это интерференционное устройство крайне чувствительно к любым механическим, температурным и прочим флуктуациям длины плеч. Кроме того, все элементы протокола КТ выполнялись при помощи коротких лазерных импульсов, которые позволяли вносить синхронизацию в сам протокол, и которые приходилось совмещать на большой базе (при этом пространственная длительность импульса составляла несколько микрометров). Можно представить, насколько критичны оказывались любые внешние возмущения.

Вопросы, рассмотренные в этих двух лекциях, конечно, далеко не исчерпывают всего многообразия задач, решаемых в квантовой информации, квантовой оптике и квантовой связи. Однако можно надеяться, что приведенный материал послужит иллюстрацией к вводной части курса по квантовой информации⁶. Кроме того, следует с осторожностью относиться к приводимым в средствах массовой информации «фактах» и «результатах» из этой области знаний, поскольку они зачастую представляют собой пафосное, но весьма неквалифицированное изложение предмета.

⁶ Такой курс, например, читается на кафедре квантовой электроники для аспирантов, и занимает два семестра.

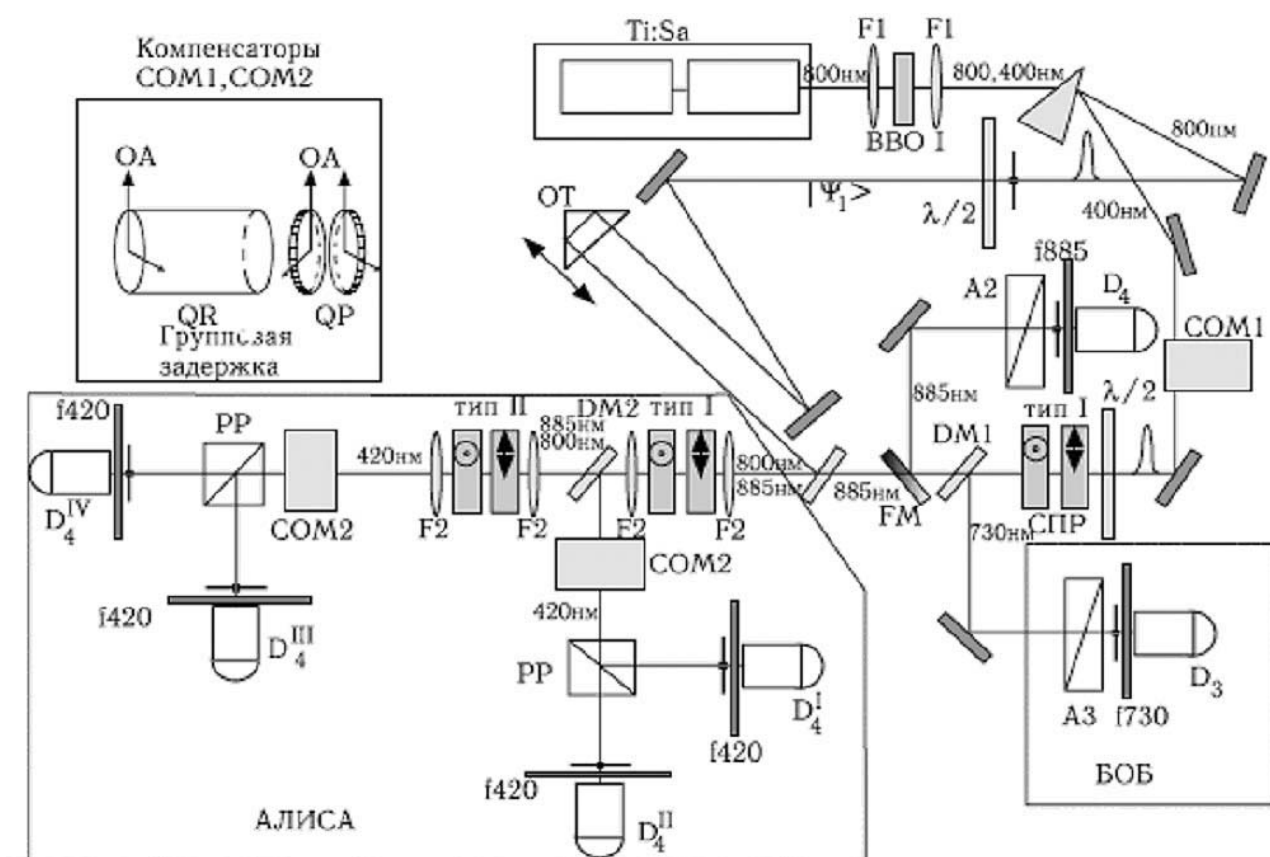


Рис.6. Экспериментальная установка по квантовой телепортации с измерением полного набора состояний Белла. Накачка - титан-сапфировый фемтосекундный лазер. В кристалле ВВО I происходит удвоение частоты. Пары линз F1 и F2 с фокусными расстояниями 25 мм использовались в качестве телескопов при генерации второй гармоники ($800\text{нм} \rightarrow 400\text{нм}$) и суммарной частоты ($885\text{нм} + 800\text{нм} \rightarrow 420\text{нм}$). DM1 и DM2 - дихроичные зеркала, нечувствительные к поляризации. FM - откидное зеркало с двумя стабильными положениями. A2 и A3 - поляризаторы, PP - поляризационные призмы. Перед каждым детектором установлены узкополосные интерференционные фильтры, центральная длина волны которых указана на рисунке.