Бистабильность и хаос в оптических системах. Оптическая турбулентность.

Лекция подготовлена в рамках спецкурса для аспирантов кафедры квантовой электроники физического ф-та МГУ “Современные проблемы лазерной физики”.

§ 01 Основные термины

◆ Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных моделей, полезно уточнить термины, стоящие в названии лекции. Рассмотрим некую гипотетическую (в нашем случае - оптическую) систему, у которой есть по меньшей мере один вход и один выход.

◆ Под **бистабильностью** будем понимать ситуацию, в которой система при одних и тех же условиях на входе может выдавать несколько (обычно - два) различных сигнала на выходе. Часто такую ситуацию детектируют по наличию гистерезисной зависимости $I_{out}(I_{in})$, другими словами, состояние, в котором окажется система, обычно зависит от ее предыстории.

◆ Под **хаосом** будет понимать ситуацию, в которой при регулярном поведении сигнала на входе выходной сигнал будет обладать хаотическим поведением в его классическом понимании (см. подробности, например, в спецкурсе П.В.Елютина “Нелинейная динамика”).

◆ Термин “турбулентность” требует более тщательной расшифровки. Классический сценарий Ландау перехода к турбулентному движению в гидродинамике требует возникновения квазипериодического движения с тремя несоразмерными частотами, кроме того размерность странного аттрактора осциллятора Лоренца, который часто используется в качестве модели для описания турбулентного движения, близка к 2. Близкое отношение к понятию турбулентности также имеют процессы самоорганизации типа ячеек Бенара. Другими словами, “турбулентность” предполагает наличие нескольких измерений, в которых происходит хаотическое движение или связанная с ним самоорганизация, т.е. возникновение неодномерных предельных циклов или странных аттракторов.

◆ Поэтому под **оптической турбулентностью** будет понимать ситуацию, в которой при регулярном входном сигнале на выходе системы будет возникать хаотическое поведение сигнала как минимум в двух измерениях или возникновение неодномерных регулярных структур, спектр которых не связан со спектром входного сигнала. Примеры оптической турбулентности можно найти в монографии Ахманова и Никитина “Физическая оптика”.

✧ С.А.Ахманов, С.Ю.Никитин "*Физическая оптика*" - М.:МГУ (1998).

◆ Далее будут рассмотрены две модели, демонстрирующие введенные выше понятия.

§ 02 Нелинейная среда в интерферометре Фабри-Перо.

◆ Рассмотрим нелинейную среду, помещенную между зеркалами интерферометра Фабри-Перо (рис.1) с коэффициентами пропускания и отражения T и R, соответственно.

✧ H.M.Gibbs, S.L.McCall, T.N.C.Venkatesant "*Differential gain and bistability using a sodium-filled Fabry-Perot interferometer*", Phys.Rev.Lett., **36**, 1135 (1976); T.Bishofbergen, Y.R.Shen "*Theoretical and experimental study of the dynamic behaviour of a nonlinear Fabry-Perot interferometer*", Phys.Rev.A, **19**, 1169 (1979).

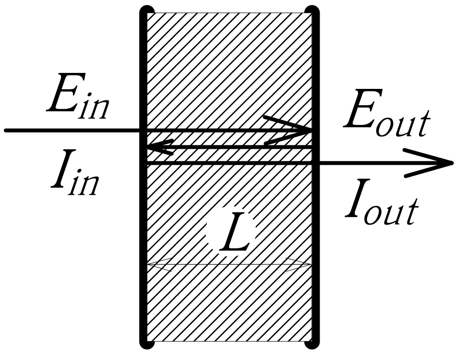

Рис.1. Интерферометр Фабри-Перо с нелинейной керровской средой.

◆ Если на вход интерферометра падает когерентное световое поле с амплитудой E_{in}, то поле на выходе интерферометра в момент времени t может быть определено при помощи рекуррентной формулы

$$E_{out}(t) = TE_{in}(t) + Re^{i\Delta\varphi}E_{out}(t-\tau), \tag{1}$$

где $\tau = 2L/c$, L - расстояние между зеркалами интерферометра, а $\Delta\varphi$ - набег фазы поля при двойном пробеге через интерферометр. Учитывая, что в интерферометре находится среда с керровской нелинейностью, а поле внутри интерферометра прямо пропорционально полю на выходе, может записать набег фазы в виде

$$\Delta\varphi = \varphi_0 + \gamma|E_{out}|^2, \tag{2}$$

где φ_0 - набег фазы в интерферометре без нелинейной среды, а γ - коэффициент нелинейности. Если интенсивность входного поля меняется медленно по сравнению со временем τ и временем реакции среды, то зависимость $I_{out}(I_{in})$ может быть найдена из стационарного решения уравнения (1):

$$\left\{1 - Rexp\left(i\varphi_0 + i\gamma|E_{out}|^2\right)\right\}E_{out} = TE_{in}. \tag{3}$$

Домножая (3) на комплексно-сопряженное выражение, получаем искомое соотношение:

$$T^2 I_{in} = \left(1 + R^2 - 2R\cos(\varphi_0 + \gamma I_{out})\right)I_{out}. \tag{4}$$

◆ График полученной зависимости показан на рис.2. Легко видеть, что полученная зависимость оказывается многозначной. Несложно убедиться в том, что ветви с отрицательным наклоном будут абсолютно неустойчивы. Для этого рассмотрим слабые отклонения от стационарного решения уравнения (1) $E_{out}(t) = E_s + \varepsilon(t)$ и лианеризуем (1) относительно ε:

$$\varepsilon(t) = Re^{i\Delta\varphi}\left\{(1+i\gamma I_s)\varepsilon_\tau + i\gamma E_s^2\varepsilon_\tau^*\right\}, \tag{5}$$

где $\varepsilon_\tau \equiv \varepsilon(t-\tau)$. Для исследования устойчивости необходимо найти собственные значения матрицы, связывающей значения ε и ε^* в моменты времени t и $t-\tau$. Вычисляя детерминант матрицы

$$\begin{vmatrix} Re^{i\Delta\varphi}(1+i\gamma I_s)-\lambda & i\gamma Re^{i\Delta\varphi}E_s^2 \\ -i\gamma Re^{-i\Delta\varphi}\left(E_s^*\right)^2 & Re^{-i\Delta\varphi}(1-i\gamma I_s)-\lambda \end{vmatrix} \tag{6}$$

и приравнивая его нулю, получаем уравнение

$$\lambda^2 - \left(1 + R^2 - G^{-1}\right)\lambda + R^2 = 0, \tag{7}$$

где G - дифференциальный коэффициент усиления:

$$G^{-1} = T^2\frac{dI_{in}}{dI_{out}} = T^2\frac{I_{in}}{I_{out}} + 2\gamma R I_{out}\sin\left(\varphi_0 + \gamma I_{out}\right). \tag{8}$$

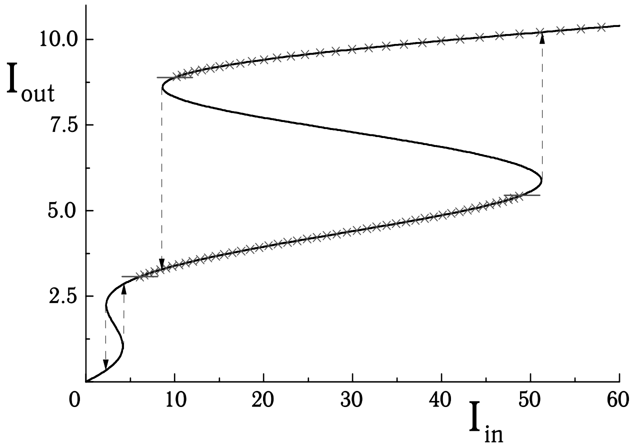

Рис.2. Зависимость $I_{out}(I_{in})$, $R = 0.5$, $\varphi_0 = -3\pi/4$, $\gamma = 1$. Пунктиром показаны направления скачков с одной устойчивой ветви на другую, крестиками выделены области осциллирующего или хаотического поведения системы.

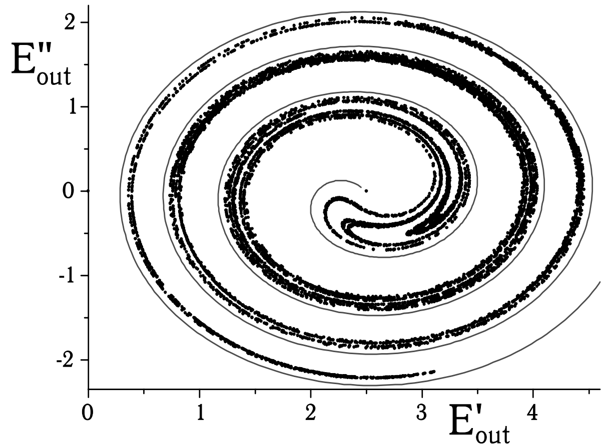

Рис.3. Фазовый портрет $E''_{out}(E'_{out})$ хаотического поведения системы при $I_{in} = 5$. Сплошной линией показан приближенный вид (14) странного аттрактора.

Условие устойчивости $|\lambda| < 1$ эквивалентно выполнению двойного неравенства

$$0 < G^{-1} < 2\left(1 + R^2\right). \tag{9}$$

Таким образом, ветвь с отрицательным наклоном оказывается неустойчивой, а зависимость $I_{out}(I_{in})$ имеет гистерезисный характер, как показано на рис.2 стрелочками. Другими словами, в области многозначности наблюдается **биста-**

бильность: величина интенсивности света на выходе зависит не только от входной интенсивности, но и от предыстории системы.

◆ Теперь рассмотрим смысл второго неравенства (9). На рис.2 области, где это условие нарушается, выделены крестиками. При достижении I_{in} нижней границы такой области интенсивность на выходе начинает осциллировать. При дальнейшем возрастании входной интенсивности происходят последовательные удвоения периода осцилляций, приводящие в итоге к возникновению **хаоса** по сценарию Фейгенбаума (рис.3). Подобное хаотическое поведение хорошо изучено для осциллятора Икеды, представляющего собой кольцевой резонатор с нелинейной средой, который с математической точки зрения практически эквивалентен рассматриваемой системе.

✧ K.Ikeda, H.Daido, O.Akimoto "*Optical turbulence: chaotic behaviour of transmitted light from ring cavity*", Phys.Rev.Lett., **45**, 709 (1980); П.С.Ланда "*Нелинейные колебания и волны*", §15.3 - М.:Наука (1997).

◆ В случае $R \ll 1$ можно приближенно найти форму возникающего странного аттрактора. Представим амплитуду поля на выходе, в соответствии с (4), в виде $E_{out} = TE_{in}\left(1+\rho e^{i\varphi}\right)$, $\rho \sim R \ll 1$. Подставляя ее в (1), получаем

$$\rho e^{i\varphi} = R\left(1+\rho_\tau e^{i\varphi_\tau}\right)\exp\left\{i\varphi_0 + i\gamma T^2 I_{in}\left|1+\rho_\tau e^{i\varphi_\tau}\right|^2\right\}. \qquad (10)$$

Легко заметить, что

$$\rho^2 = R^2\left|1+\rho_\tau e^{i\varphi_\tau}\right|^2. \qquad (11)$$

Тогда (10) можно переписать в следующем виде:

$$\rho e^{i\left(\varphi-\varphi_0-\gamma T^2 I_{in}\rho^2/R^2\right)} = R\left(1+\rho_\tau e^{i\varphi_\tau}\right). \qquad (12)$$

Аргумент правой части этого выражения

$$|\psi| = \left|arctg\left\{\frac{\rho\, sin\,\varphi}{1+\rho\, cos\,\varphi}\right\}\right| \le arctg\,\rho \sim R \ll 1, \qquad (13)$$

Поэтому в первом приближении амплитуда ρ и фаза φ связаны соотношением

$$\gamma T^2 I_{in}\rho^2 = R^2\left(\varphi-\varphi_0\right), \qquad (14)$$

которое вполне адекватно описывает форму странного аттрактора даже при $R = 0.5$ (рис.3).

◆ Перейдем к рассмотрению поперечных неоднородностей в интерферометре Фабри-Перо с керровской нелинейностью. Для этого добавим в (1) член, описывающий дифракцию света. Кроме того, будем считать время τ достаточно малым, чтобы было достаточно описывать изменения E_{out} при помощи ее первой производной $E_{out}(t+\tau) \equiv E(t+\tau) \approx E(t) + \tau E_t$:

$$\tau E_t = TE_{in} - E + REe^{i\Delta\varphi} + id\Delta_\perp E\ . \qquad (15)$$

✧ L.A.Lugiato, R.Lefever “*Spatial dissipative structures in passive optical systems*”, Phys.Rev.Lett., **58**, 2209 (1987)

◆ Стационарное решение (4) в этом случае остается неизменным, а вот условия устойчивости приобретают вид требования отрицательности инкремента нарастания $\varkappa$ малых отклонений $\varepsilon(t,\rho)=\varepsilon e^{\varkappa t+ik\rho}$ в соотношении $\varkappa(k)$, задаваемым выражением

$$\begin{vmatrix} Re^{i\Delta\varphi}\left(1+i\gamma I_s\right)-1-\varkappa\tau-idk^2 & i\gamma Re^{i\Delta\varphi}E_s^2 \\ -i\gamma Re^{-i\Delta\varphi}\left(E_s^*\right)^2 & Re^{-i\Delta\varphi}\left(1-i\gamma I_s\right)-1-\varkappa\tau+idk^2 \end{vmatrix}=0 \qquad (16)$$

Аналитическое исследование этого уравнения слишком громоздко, поэтому на рис.4 показаны численно полученные области неустойчивости (ср. с рис.2). Таким образом, даже если система устойчива в продольном направлении, она почти всегда неустойчива по отношению к поперечным возбуждениям с определенными волновыми векторами, и если интерферометр Фабри-Перо и диаметр пучка накачки имеют достаточные поперечные размеры, то в системе будут формироваться поперечно-неоднородные структуры, являющиеся примерами **оптической турбулентности**.

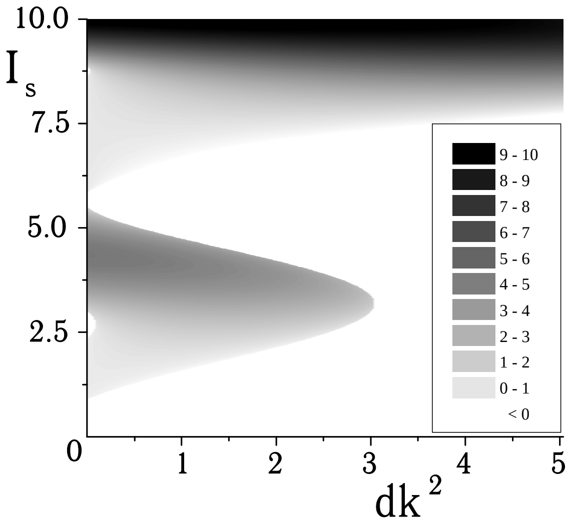

Рис.4. Области поперечной неустойчивости системы (15) на плоскости “интенсивность на выходе I_S - квадрат волнового вектора dk^2”, $R=0.5$, $\varphi_0=-3\pi/4$, $\gamma=1$. Контрастом показано значение инкремента нарастания $\varkappa\tau$.

§ 03. Нелинейная среда с обратной связью.

◆ Перейдем к рассмотрению несколько иной системы. Луч световой накачки падает на тонкий слой толщины L нелинейной среды, медленно (с запаздыванием) реагирующей на проходящее через нее излучение, отражается от зеркала, стоящего на расстоянии D, и снова проходит через нелинейность (рис.5). Свет, таким образом, проходит через нелинейную среду только два раза, однако благодаря инерционности нелинейности он оказывает влияние на прохождение света в следующие моменты времени. Амплитуды падающего $F(z)$ и отраженного $B(z)$ поля внутри нелинейной среды могут быть описаны системой уравнений

$$\begin{aligned} &F_z = i\gamma n F; \\ &B_z = -i\gamma n B; \end{aligned} \tag{17}$$

где γ, как и ранее, коэффициент нелинейности среды, а n - ее показатель преломления, зависящий от интенсивности проходящего через него света:

$$\tau n_t - d\Delta_\perp n + n = |F|^2 + |B|^2 . \tag{18}$$

Здесь τ - характерное время реакции среды, а d - коэффициент диффузии, приводящей к расплыванию неоднородностей показателя преломления. В случае распространенной модели нелинейности, обусловленной перераспределением носителей заряда в зоне проводимости, d пропорционально квадрату их длины свободного пробега. При этом эволюция светового поля между нелинейным слоем и зеркалом описывается обыкновенным параболическим уравнением

$$\begin{aligned} 2iqF_z + \Delta_\perp F = 0; \\ -2iqB_z + \Delta_\perp B = 0; \end{aligned} \tag{19}$$

где $q = 2\pi c/\lambda$ - волновой вектор света. Отметим, что функции F, B, n одновременно зависят от времени t, продольной координаты z и поперечного радиус-вектора ρ, однако ни в одном из уравнений не присутствуют явно сразу все эти переменные, что значительно упрощает исследование системы.

✧ W.J.Firth “*Spatial instabilities in a Kerr medium with single feedback mirror*”, J.Mod.Optics, **37**, 151 (1990); G.D'Alessandro, W.J.Firth “*Spontaneous hexagon formation in a nonlinear optical medium with feedback mirror*”, Phys.Rev.Lett., **66**, 2597 (1991)

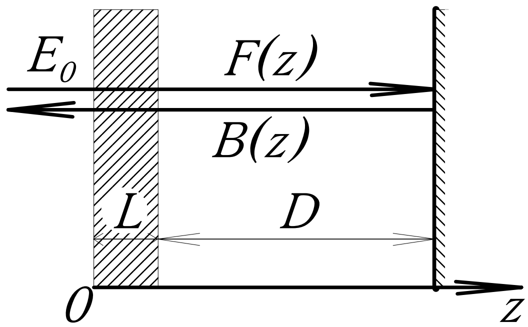

Рис.5. Нелинейный слой с зеркалом обратной связи.

◆ Стационарное поперечно-однородное решение системы (17-19) находится элементарно:

$$\begin{aligned} &F_0 = E_0 e^{i\gamma n_0 z}; \\ &B_0 = rE_0 e^{i\gamma n_0 (2L - z) + 2iDq}; \\ &n_0 = (1 + R) I_0; \end{aligned} \tag{20}$$

где $R = |r|^2$ - коэффициент отражения зеркала, а I_0 - интенсивность накачки. Рассмотрим слабые отклонения от стационарного решения

$$\begin{aligned} &F = F_0 + f; \\ &B = B_0 + b; \\ &n = n_0 + \varepsilon. \end{aligned} \tag{21}$$

Подставляя их в уравнения (17), получаем

$$\begin{aligned} &f_z = i\gamma F_0 \varepsilon + i\gamma n_0 f; \\ &b_z = -i\gamma B_0 \varepsilon - i\gamma n_0 b. \end{aligned} \tag{22}$$

Так как поперечный радиус-вектор ρ в уравнения не входит, удобно произвести по нему фурье-преобразование. Тогда уравнение (18) примет вид

$$\tau\varepsilon_t + \left(1 + dk^2\right)\varepsilon = F_0 f^* + B_0 b^* + к.с., \tag{23}$$

где k - координата в поперечном спектральном пространстве. Аналогично, из (19) получаем:

$$\begin{aligned} &2iqf_z - k^2 f = 0; \\ &2iqb_z + k^2 b = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Логично предположить, что ε, как и n_0 (20), не зависит от z. Тогда можно точно решить уравнения (22,24), получив для слабых возмущений поля в среде выражения

$$\begin{aligned} &f = i\gamma z F_0(z)\varepsilon(k,t); \\ &b = i\gamma\left(Le^{-iDk^2/q} - z\right)B_0(z)\varepsilon(k,t-T). \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь $T = 2D/c$ - время, за которое пучок света дойдет от нелинейного слоя до зеркала и вернется обратно. Подставляя полученные решения в (23), получаем уравнение относительно единственной функции $\varepsilon(k,t)$:

$$\tau\varepsilon_t + \left(1 + dk^2\right)\varepsilon = 2\gamma LRI_0\varepsilon_T \sin Dk^2/q, \tag{26}$$

где $\varepsilon_T \equiv \varepsilon(t-T)$. Таким образом, зеркало играет роль обратной связи, усиливающей или ослабляющей поперечные неоднородности. Для исследования устойчивости стационарного состояния (21) будем искать решение в виде $\varepsilon(t) = \varepsilon\, exp(\varkappa t + i\omega t)$. Подставляя его в уравнение (26), и переходя от комплексных выражений к их модулям, получаем:

$$\sqrt{\omega^2\tau^2 + \left(1 + dk^2 + \varkappa\tau\right)^2} = 2\gamma LRI_0 e^{-\varkappa\tau}\left|\sin Dk^2/q\right|. \tag{27}$$

Легко видеть, что положительные значения $\varkappa$, т.е. развитие неустойчивости, возможно при условии выполнения неравенства

$$\gamma LI_0 \geq \frac{\sqrt{\omega^2\tau^2 + \left(1 + dk^2\right)^2}}{2R\left|\sin Dk^2/q\right|}. \tag{28}$$

В частности, наиболее мягким оказывается условие возникновения стационарных возмущений с $\omega = 0$:

$$\gamma L I_0 \geq \frac{1 + dk^2}{2R\left|\sin Dk^2/q\right|}. \tag{29}$$

На рис.6 показаны области, в которых стационарное решение (21) неустойчиво. При малых значениях интенсивности накачки неустойчивость не развивается.
◆ При увеличении интенсивности наиболее выгодным является возникновение неустойчивости с минимальным волновым вектором k_0. Направление этого вектора произвольно, причем возможно одновременное развитие нескольких неустойчивостей, отличающихся только направлением вектора k_0. Однако три вектора одинаковой длины способны составить равносторонний треугольник. Возмущения, соответствующие трем таким волновым векторам k_0 благодаря их взаимодействию будут развиваться наиболее интенсивно, что объясняет возникновение стационарной гексагональной структуры (рис.7). При дальнейшем увеличении интенсивности накачки "включаются" нестационарные возбуждения с $\omega \neq 0$, приводящие к возникновению двумерной хаотической структуры. Таким образом, в рассмотренной системе возможна реализация различных режимов **оптической турбулентности**.

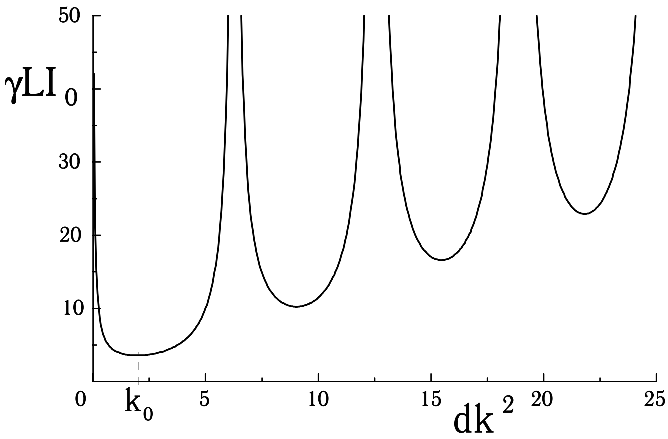

Рис.6. Области неустойчивости стационарного решения (21), $R = 0.5$, $qd = 2D$.

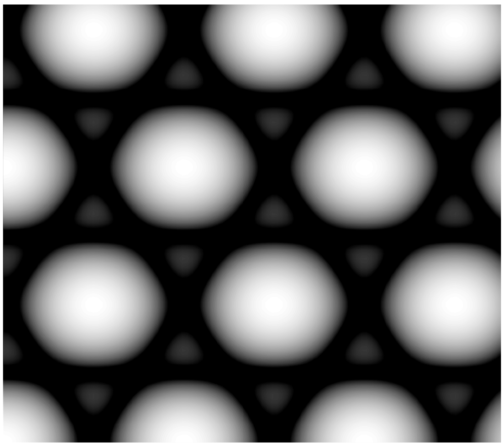
Рис.7. Характерный вид гексагональной структуры.

☯