

ЛЕКЦИЯ #11

КОЛЕБАНИЯ В ДВУМЕРНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ - 2

§ 11.01 Переменные "действие - угол"

◆ **Действие** - собирательное название группы скалярных физических величин, зависящих от состояний лагранжевой или гамильтоновой системы на некотором интервале времени и имеющих размерность ML^2T^{-1} . Наиболее важны следующие три разновидности действия.

1. Для лагранжевой системы, состояние которой описывается набором обобщенных координат q и обобщенных скоростей \dot{q} , (**гамильтоновым действием** S называется интеграл по времени от функции Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (1)$$

Эта величина служит основой для формулировки принципа наименьшего действия Гамильтона [ЛЛ1, §2].

2. Для гамильтоновой системы с обобщенными импульсами p_i и обобщенными координатами q_i **укороченным действием** S_0 называется величина

$$S_0 = \int \sum_i p_i dq_i \quad (2)$$

где интегрирование ведется вдоль траектории движения системы. Эта величина служащую основой для формулировки принципа наименьшего действия Мопертюи [ЛЛ1, §44].

3. Если в гамильтоновой системе переменные $p_i(t), q_i(t)$ являются периодическими функциями времени (с одинаковым периодом), то величина

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i \quad (3)$$

где интеграл берется по полному периоду изменения импульса как функции координаты, называется **переменной действия** для степени свободы i . [ЛЛ1, §48,50]. Для краткости в дальнейшем мы будем называть I_i действием.

Термин парадоксален: величина I_i вводится для случая, когда она является интегралом движения - остается **постоянной** - а называется **переменной**. Дело в том, что действие I_i можно рассматривать как динамическую переменную - канонический импульс, который вместе с сопряженной ему координатой - **углом** θ_i - приводит к исключительно простым уравнениям движения.

Для системы с одной степенью свободы можно представить гамильтониан как функцию действия $H = H(I)$. Канонические уравнения для переменных "действие - угол" имеют вид

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \Omega(I) \quad (4)$$

и мгновенно интегрируются;

$$I = \text{const} = I_0, \quad \theta = \Omega(I_0)t + \theta_0. \quad (33)$$

Таким образом, для отыскания частоты движения переменных данной степени свободы достаточно отыскать производную от энергии по действию.

Для системы с одной степенью свободы действие пропорционально площади области фазовой плоскости, лежащей внутри траектории.

♦ Пример 1. Для гармонического осциллятора - системы с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega^2 q^2}{2} \quad (5)$$

фазовая траектория движения с энергией E есть эллипс с полуосями

$$p_+ = \sqrt{2mE}, \quad q_+ = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (6)$$

Площадь этого эллипса $A = 2\pi E/\Omega$, откуда действие $I = E/\Omega$. Гамильтониан в переменных действие - угол имеет вид $H(I) = \Omega I$: энергия гармонического осциллятора - **линейная** функция действия.

♦ Пример 2. Для частицы в прямоугольном ящике ширины l (см. §1.01, пример 1) фазовая траектория движения с энергией E есть прямоугольник со сторонами

$$2p_+ = \sqrt{2mE}, \quad 2q_+ = 2l \quad (7)$$

Отсюда действие $I = \sqrt{8mEl^2}/\pi$. Гамильтониан в переменных действие - угол имеет вид

$$H(I) = \frac{\pi}{8ml^2} I^2; \quad (8)$$

энергия частицы в потенциальном ящике - **квадратичная** функция действия.

♦ Если гамильтониан системы может быть выражен только через переменные действия для всех ее степеней свободы, то система является интегрируе-

мой. Использование переменных "действие - угол" оказывается наиболее удобным способом изучения систем, близких к интегрируемым.

§ 11.02 Консервативный нелинейный резонанс в переменных действие - угол

◆ Консервативный нелинейный резонанс в системах с возмущением, гармонически зависящим от времени, удобно описывать, используя переменные действие - угол. Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = H_0(p, q) - Fq \cos \omega t \quad (9)$$

Невозмущенную систему (с $F = 0$) можно описывать гамильтонианом $H_0(I)$, зависящим только от переменной действия I . Уравнения движения в этом случае таковы:

$$\dot{I} = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta} = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H_0}{\partial I} = \Omega(I_0) \quad (10)$$

Они определяют закон движения невозмущенной системы

$$I = \text{const} = I_0, \quad \theta = \Omega(I_0)t + \theta_0 \quad (11)$$

◆ Рассмотрим теперь эволюцию возмущенной системы (9).

1. Допустим, что ангармонизм колебаний невозмущенной системы является слабым, и движение $q(t)$ может быть хорошо аппроксимировано гармоническим законом:

$$q(t) = a(I_0) \cos \theta \quad (12)$$

где $a(I_0) = a$ есть амплитуда Фурье первой гармоники. В этом приближении гамильтониан возмущенной системы принимает вид

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) - Fa \cos \theta \cos \omega t \quad (13)$$

а уравнения движения таковы:

$$\dot{I} = -Fa \sin \theta \cos \omega t, \quad \dot{\theta} = \Omega(I) \quad (14)$$

2. Рассматривая движение системы вблизи резонанса, будем считать, что движение системы происходит в области фазового пространства, где частота $\Omega(I)$ близка к частоте возмущения ω . В первом уравнении системы (14) сохраним только резонансный - осциллирующий с наименьшей частотой - член:

$$\dot{I} = -\frac{Fa}{2} \sin(\theta - \omega t), \quad \dot{\theta} = \Omega(I) \quad (15)$$

3. Пусть I_r - такое значение действия, что соответствующая ему частота равна частоте внешнего возмущения:

$$\Omega(I_r) = \omega \quad (16)$$

Введем новые динамические переменные - величины J и ψ , представляющие собой отклонения по переменным действия и фазы

$$J = I - I_r, \quad \psi = \theta - \omega t \quad (17)$$

4. Считая, что во время движения величина J остается малой в сравнении с I_r , во втором уравнении системы (15) разложим правую часть по степеням J и ограничимся линейным членом:

$$\dot{\theta} = \Omega(I_r + J) \approx \omega + \kappa J, \quad (18)$$

где κ - параметр неизохронности

$$\kappa = \frac{d\Omega}{dI} \quad (19)$$

(значение производной берется при $I = I_r$).

5. Подстановка (17) и (18) в систему (15) приводит к уравнениям для переменных J и ψ

$$\dot{J} = -\frac{Fa}{2} \sin \psi, \quad \dot{\psi} = \kappa J \quad (20)$$

Это - канонические уравнения для модели маятника (§5.03) с гамильтонианом

$$\tilde{H} = \frac{\kappa}{2} J^2 - \frac{Fa}{2} \cos \psi \quad (21)$$

Из выражения (21) устанавливается полуширина резонанса по действию

$$\Delta J = \sqrt{\frac{2Fa}{\kappa}} \quad (22)$$

а из (18) и (22) - полуширина резонанса по частоте

$$\Delta \omega = \kappa \Delta J = \sqrt{2Fa\kappa} \quad (23)$$

♦ Пример 1. Для частицы массы m , совершающей одномерное движение между жесткими стенками в точках с координатами $q = \pm l$, используя найденные ранее зависимость переменной действия от энергии (см. пример 2 в предыдущем §) и фурье - разложение закона движения (см. §1.01, пример 1), для полуширины резонанса по действию имеем: $\Delta J = \sqrt{2Fml^3/\pi}$.

◆ Возвращаясь к выражению (12), закон движения возмущенной системы вблизи резонанса можно представить в виде

$$q(t) = a(I_r + J(t)) \cos(\omega t + \psi(t)) \quad (25)$$

Если $\tilde{\Omega}$ - частота движения маятника при заданных начальных условиях, то закон движения возмущенной системы является двухчастотным квазипериодическим с частотами ω и $\tilde{\Omega}$. О движениях возмущенной системы, которым соответствуют колебания маятника, говорят как о движениях, захваченных в нелинейный резонанс. Частота $\tilde{\Omega}$ для захваченных в резонанс движений не превосходит частоты малых осцилляций маятника -

$$\tilde{\Omega} \leq \sqrt{\frac{Fak}{2}} \quad (26)$$

◆ Модель маятника является универсальной для описания консервативного резонанса. Она может быть также использована для описания резонансов высших порядков - например, когда частота возмущения близка к одной из гармоник частот движения невозмущенной системы.

◆◆ Гамильтонова система с одной степенью свободы под воздействием слабого ($F \ll 1$) гармонического возмущения $F \cos \omega t$ почти всегда совершает квазипериодическое двухчастотное движение, одна из частот которого, Ω_1 , равна частоте возмущения ω .

Если частота ω далека от частоты движения Ω невозмущенной системы с теми же начальными условиями (движение вдали от консервативного нелинейного резонанса), то вторая частота движения $\Omega_2 \approx \Omega$ и слабо зависит от амплитуды возмущения F . Движение системы эффективно описывается суперпозицией двух периодических движений.

Если частота ω близка к частоте Ω движения невозмущенной системы (движение внутри консервативного нелинейного резонанса или вблизи него), то вторая частота движения Ω_2 мала, зависит от начальных условий и от величины возмущения F . Движение системы эффективно описывается моделью медленно (периодически) модулированного гармонического движения.

Граница между этими двумя случаями определяется шириной консервативного нелинейного резонанса по частоте (23), которая растет с увеличением амплитуды воздействия, $\Delta\omega \sim \sqrt{F}$.

Выше были рассмотрены задачи о воздействии гармонической силы на консервативную систему, совершающую периодические колебания. При этом почти всегда движение оказывается квазипериодическим двухчастотным - одна из частот совпадает с частотой внешнего возмущения, а другая определяется начальными условиями и (в резонансном случае) амплитудой возмущения.

Другим типом систем, совершающих периодическое движение в отсутствие внешнего поля, являются диссипативные автоколебательные системы с предельным циклом, примеры которых рассмотрены в лекциях L06 и L07. У них появляются качественно иные свойства - если внешняя гармоническая сила достаточно мала, а ее

частота ω не совпадает с частотой автоколебаний невозмущенной системы Ω , то естественно ожидать, что система будет совершать квазипериодическое движение с частотами Ω и ω . С другой стороны, при достаточно большой величине силы можно ожидать, что в системе удержится только один - периодический - режим движения с частотой внешней силы ω . Это явление называется **синхронизацией** или **захватыванием частоты** (**mode locking** или **phase locking**), а такие колебания мы будем называть **синхронными**. С их рассмотрения мы и начнем.

§ 11.03 Периодическое движение - синхронные колебания

◆ Следуя традиции [ММ+88, §5.6; РТ84, §16.1], рассмотрим модель, описывающую воздействие гармонической внешней силы на осциллятор Ван дер Поля - систему с уравнением движения

$$\ddot{x} - \alpha \dot{x}(1 - x^2) + x = F \cos \omega t \quad (27)$$

(Напомним, что осциллятор Ван дер Поля получается из осциллятора Рэля заменой переменных). В отсутствие внешней силы при малых α движение на предельном цикле есть гармоническое колебание с частотой $\Omega \approx 1$ и амплитудой $A = 2$.

$$x_0(t) = 2 \cos t \quad (28)$$

◆ Рассмотрим теперь решения уравнения (4), имеющие частоту внешнего поля и описывающие синхронные колебания. Подставляя в уравнение (4) решение в виде

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (29)$$

раскладывая левую часть в ряд Фурье и приравнивая коэффициенты при функциях $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, получаем уравнения

$$\begin{aligned} a(1 - \omega^2) - \alpha b \omega \left(1 - \frac{1}{4} A^2\right) &= F \\ b(1 - \omega^2) + \alpha a \omega \left(1 - \frac{1}{4} A^2\right) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

где $A^2 = a^2 + b^2$.

◆ Отметим аналогию формы этих уравнений и соответствующих уравнений для фурье-амплитуд первой гармоники в задаче о нелинейном резонансе осциллятора Дуффинга (L08, уравнения (23) и (24)):

$$\left(1 + \frac{3}{4} A^2 - \omega^2\right) a + 2\gamma \omega b = F, \quad \left(1 + \frac{3}{4} A^2 - \omega^2\right) b - 2\gamma \omega a = 0$$

где $A^2 = a^2 + b^2$. Сходство уравнений определяет сходство методов их решения.

Возводя уравнения (4) в квадрат и складывая, получаем уравнение для квадрата амплитуды первой гармоники вынужденных колебаний A^2

$$\left(1 - \frac{1}{4}A^2\right)^2 \alpha^2 \omega^2 A^2 + (1 - \omega^2)^2 A^2 = F^2 \quad (31)$$

Это - кубическое уравнение относительно величины $z = A^2$. В зависимости от значений параметров оно может иметь один или три вещественных корня. Важную роль играют критические значения параметров F_c и ω_c , при которых все три вещественных корня совпадают. Обозначим это значение ζ . Полагая

$$\left(1 - \frac{1}{4}z\right)^2 \alpha^2 \omega_c^2 z + (1 - \omega_c^2)^2 z - F_c^2 = \frac{\alpha^2 \omega_c^2}{16}(z - \zeta)^3 \quad (32)$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z , получаем систему уравнений, из которой находим:

$$\zeta = \frac{8}{3}, \quad \omega_c^2 = 1 + \frac{1}{6}\left(\alpha^2 \pm \sqrt{12\alpha^2 + \alpha^4}\right), \quad F_c = \sqrt{\frac{32}{27}}\alpha\omega_c \quad (33)$$

В отличие от задачи о нелинейном диссипативном резонансе, в задаче о синхронизации существуют две критические точки с частотами выше и ниже резонансной. При малых α выражения (33) упрощаются:

$$\omega_c \approx 1 \pm \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad F_c \approx 1.09\alpha \quad (34)$$

Если амплитуда внешней силы превосходит критическое значение F_c , то кубическое уравнение (32) может иметь три действительных положительных корня - в некотором интервале частот в системе возможны периодические (с частотой внешнего воздействия) колебания с **тремя** различными значениями амплитуды. Устойчивость этих решений будет исследована отдельно.

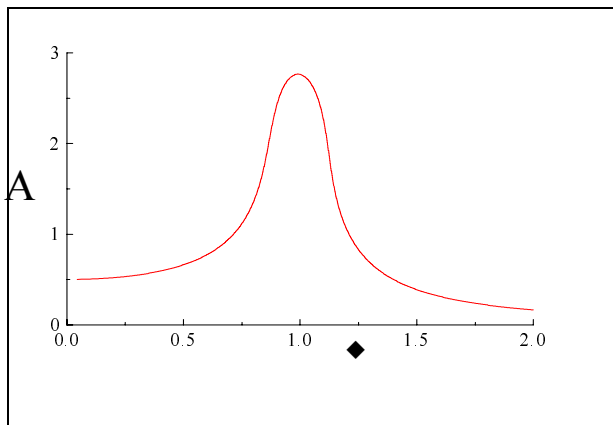


Рис. 11.1

Зависимость амплитуды A синхронных колебаний осциллятора Ван-дер-Поля от частоты ω при значениях параметров $\alpha = 0.2$ и $F = 0.5 = 2.29F_c$.

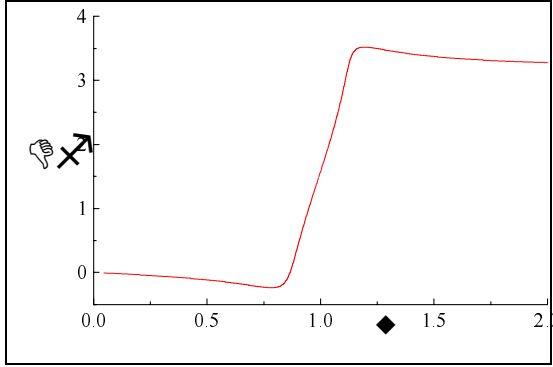


Рис. 11.2

Зависимость фазового сдвига $\varphi = \arctg(b/a)$ синхронных колебаний осциллятора Ван-дер-Поля от частоты ω при значениях параметров $\alpha = 0.2$ и $F = 0.5 = 2.29F_c$.

§ 11.04 Устойчивость синхронных колебаний

◆ Для исследования устойчивости синхронных колебаний используем метод медленно меняющихся амплитуд. Подставим в (27) решение вида

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (35)$$

считая, что амплитуды a и b суть медленно меняющиеся функции времени. Пренебрегая вторыми производными по времени от a и b и малыми членами второго порядка типа $\alpha \dot{a}$ и $\alpha \dot{b}$ и собирая коэффициенты при функциях $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2\omega} \left[b(1 - \omega^2) + \alpha a \omega \left(1 - \frac{1}{4} A^2 \right) \right] \\ \dot{b} &= -\frac{1}{2\omega} \left[a(1 - \omega^2) - \alpha b \omega \left(1 - \frac{1}{4} A^2 \right) - F \right] \end{aligned} \quad (36)$$

Найденные в предыдущем параграфе значения a и b описывают неподвижные точки этой системы. Для исследования устойчивости этих точек необходимо вычислить собственные значения матрицы устойчивости \hat{M} (см. L04, §4.03) в этих точках. Для некоторого упрощения выражений выберем в качестве единицы времени величину $T = (2\omega)^{-1}$. Вычисляя элементы матрицы \hat{M} , получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \alpha \omega \left(A^2 - 2 \right) \lambda + \left(\omega^2 - 1 \right)^2 + \alpha^2 \omega^2 \left(1 - \frac{1}{4} A^2 \right) \left(1 - \frac{3}{4} A^2 \right) = 0 \quad (37)$$

Неподвижные точки, для которых собственные значения матрицы устойчивости определяются уравнением

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (38)$$

неустойчивы, если хотя бы одно собственное значение имеет **положительную** действительную часть. Следовательно, область неустойчивости есть **объединение** областей, в которых $p < 0$ или $q < 0$. Для уравнения (37) это приводит к выражениям для границ областей неустойчивости

$$\alpha\omega(A^2 - 2) = 0 \quad (39)$$

и

$$\left(\omega^2 - 1\right)^2 + \alpha^2\omega^2\left(1 - \frac{1}{4}A^2\right)\left(1 - \frac{3}{4}A^2\right) = 0 \quad (40)$$

Из плоскости $\{\omega, A\}$ условие $p < 0$ вырезает полосу $A < \sqrt{2}$, лежащую ниже прямой (13), а условие $q < 0$ - область, внешняя граница которой, заданная уравнением (14), есть замкнутая выпуклая кривая (овал), при малых α близкая к эллипсу. В зависимости от значений параметров α и F , резонансная кривая на плоскости $\{\omega, A\}$, заданная уравнением (5), может пересекать границы области неустойчивости два (кривые А и С на рис. 11.3), четыре (кривая В на рис. V16.3) или шесть раз.

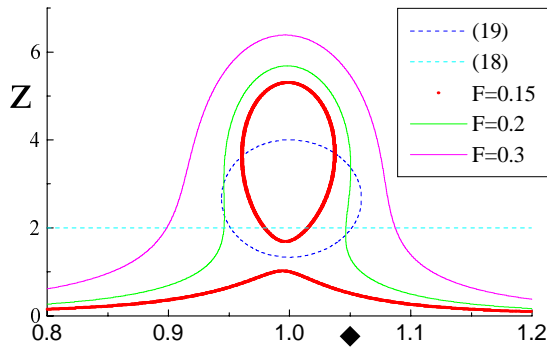


Рис. 11.3

Резонансные кривые синхронных колебаний осциллятора Ван-дер-Поля на плоскости переменных $z - \omega$ при значениях параметров $\alpha = 0.2$ и значениях силы $F = 0.15 = 0.63F_c$ (А), $F = 0.2 = 0.92F_c$ (В) и $F = 0.3 = 1.38F_c$ (С). Штриховыми линиями показаны границы области устойчивости.

◆ Рассмотрим границы области устойчивости при малых значениях расстройки

$$\Delta = \frac{\omega^2 - 1}{2} \quad (41)$$

и малых значениях силы $F \ll \alpha$. При $\Delta = 0$ резонансная кривая (31) имеет максимум, положение которого определяется уравнением

$$\left(1 - \frac{z}{4}\right)^2 \alpha^2 z = F^2 \quad (42)$$

При $F \ll \alpha$ максимальный корень этого уравнения равен

$$z_+ \approx 4 + 2\frac{F}{\alpha} \quad (43)$$

Эта точка лежит вне овала (40) и выше прямой (39) и потому устойчива.

Устойчивые синхронные колебания существуют при любых, сколь угодно малых значениях силы F .

При малых расстройках Δ уравнение резонансной кривой может быть приближенно записано в виде

$$4\alpha^2\left(1 - \frac{z}{4}\right)^2 + 4(\omega^2 - 1)^2 = F^2. \quad (44)$$

Точку пересечения этой кривой с овалом (40) можно получить, положив $z = 4$. Значения частот, соответствующие этим точкам пересечения, суть

$$\omega_{s\pm}^2 = 1 \pm \frac{F}{2} \quad (45)$$

В интервале $\omega_{s-} < \omega < \omega_{s+}$ резонансная кривая лежит вне овала (40), и все лежащие на ней точки устойчивы. Этот интервал будем называть центральной полосой устойчивой синхронизации.

При малых значениях силы $F \ll \alpha$ полоса устойчивой синхронизации лежит вблизи резонансной частоты $\omega = 1$. Синхронизация происходит, если расстройка по абсолютной величине не превосходит значения

$$\Delta_c = \frac{F}{4}. \quad (46)$$

Спектральная ширина полосы синхронизации растет пропорционально величине силы F .

◆ Прямая (39) и овал (40) имеют две точки пересечения, которым соответствуют значения

$$z_t = 2, \quad \omega_{t\pm}^2 = 1 + \frac{1}{8}\left(\alpha^2 \pm \sqrt{16\alpha^2 + \alpha^4}\right) \quad (47)$$

Эти точки оказываются лежащими на резонансной кривой при значениях силы

$$F_{t\pm} = \alpha\sqrt{1 + \frac{1}{8}\left(\alpha^2 \pm \sqrt{16\alpha^2 + \alpha^4}\right)} \quad (48)$$

При малых значениях α эти значения можно считать одинаковыми: $F_{t\pm} \approx F_t = \alpha$. При $F > F_t$ появляются участки резонансной кривой, лежащие выше прямой (39) и вне овала (40). Им соответствует появление новых полос устойчивой синхронизации, лежащих вблизи частот

$$\omega_{t\pm} = 1 \pm \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{32}\alpha^2. \quad (49)$$

Внешние границы этих полос $\omega_{e\pm}$ определяются пересечениями резонансной кривой с прямой (13). Подставляя $z = 2$ в уравнение (5), получаем

$$\omega_{e\pm}^2 = 1 + \frac{1}{8} \left(-\alpha^2 \pm \sqrt{32F^2 - 16\alpha^2 + \alpha^4} \right) \quad (50)$$

Отсюда следует, что с увеличением силы внешние границы новых полос синхронизации расширяются.

При больших значениях силы $F \gg \alpha$ полоса устойчивой синхронизации лежит вблизи резонансной частоты $\omega = 1$. Синхронизация происходит, если расстройка по абсолютной величине не превосходит значения

$$\Delta_c = \frac{F}{2\sqrt{2}}. \quad (51)$$

Спектральная ширина полосы синхронизации растет пропорционально величине силы F .

◆ Рассмотрим резонансную кривую, заданную уравнением (31), как график функции $\omega^2(z)$. Для определенности ограничимся одной ее ветвью $\omega_+^2(z)$. Дифференцированием уравнения (31) находим, что производная $d\omega_+^2/dz$ обращается в ноль в точках пересечения резонансной кривой и овала. Элементарное исследование показывает, что точке пересечения с меньшим значением z соответствует минимум, а с большим - максимум функции $\omega_+^2(z)$, соответственно, для ветви $\omega_-^2(z)$ точке пересечения с меньшим значением z соответствует максимум, а с большим - минимум зависимости $\omega_-^2(z)$. Таким образом, новые полосы устойчивых синхронных колебаний рождаются **внутри** полученной нами ранее центральной полосы синхронизации, и лежат вблизи ее границы.

Осциллятор Ван дер Поля под действием гармонической силы обладает бистабильностью: при значениях силы $F_t \approx \alpha \leq F \leq F_c \approx 1.09\alpha$ и при частоте внешней силы, лежащей в интервале $\omega_t \approx 1 + \alpha/4 \leq \omega \leq \omega_c \approx 1 + \alpha/\sqrt{12}$ или в интервале $\omega_t \approx 1 - \alpha/4 > \omega > \omega_c \approx 1 - \alpha/\sqrt{12}$, в системе могут существовать два устойчивых колебания с частотой ω , различающихся амплитудами и фазовыми сдвигами по отношению ко внешней силе.

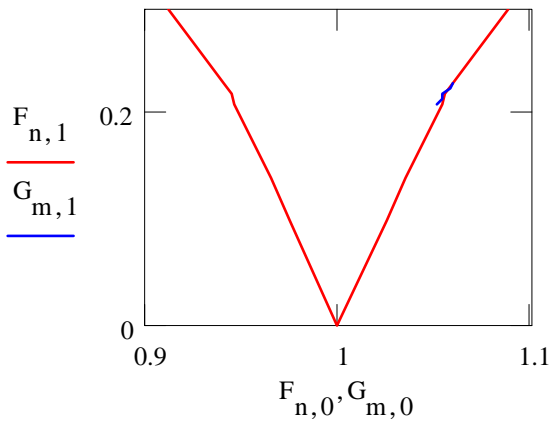


Рис. 11.4

Границы области синхронизации колебаний для осциллятора Ван дер Поля на плоскости переменных $F - \Omega$ при значении параметра $\alpha = 0.2$. Синяя линия показывает одну из областей бистабильности. В увеличенном виде в приведенных координатах она показана на следующем рисунке.

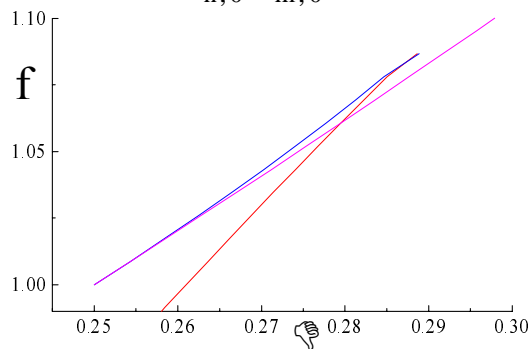


Рис. 11.5

Границы одной из областей бистабильности синхронных колебаний в осцилляторе Ван дер Поля на плоскости переменных "приведенная расстройка $\Delta = (\omega - 1)/\alpha$ - приведенная сила $f = F/\alpha$ ". Синхронные колебания бистабильны при значениях параметров, лежащих внутри криволинейного треугольника.

Хотя размеры областей бистабильности незначительны, а степень их устойчивости весьма мала, но их наличие представляет принципиальный интерес.

♦ Задача об устойчивости синхронных колебаний для осциллятора Ван-дер-Поля при малых значениях параметра $\alpha \ll 1$ была решена Андроновым и Виттом еще в 1930 году [AW30, A56]. В своей пионерской работе эти авторы отметили наличие у системы области бистабильности, в которой "существует одновременно два устойчивых периодических решения" [A56, с. 64], но отказались от ее рассмотрения. Хотя и сама задача, и предложенный в работе [AW30] метод ее решения, основанный на уравнениях для медленно меняющихся амплитуд, вошли в стандарт учебного курса теории колебаний [РТ84, с.251-258; ММ+88, с. 214-219], утверждение о бистабильности синхронных колебаний осталось без внимания и со временем было забыто настолько, что стало отрицаться [Д80, с.75-76].

AW30. Andronow A., Witt A. "Zur Theorie des Mintnehmens von van der Pol." Archiv für Electrotechnik, 1930, Bd. XXIV, S. 99-110.

A56 Андронов А.А. Собрание трудов. - Изд.-во АН СССР, 1956. - 538 с.

Д80 Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. -.360 с.

