ЛЕКЦИЯ #10
КОЛЕБАНИЯ В ДВУМЕРНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ
КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

ТЕСТ #4

Выше мы рассматривали задачи о периодических движениях в системах с одной степенью свободы под действием силового периодического возмущения. Рассматривался класс диссипативных систем с затуханием, для которого в отсутствие поля единственными аттракторами являлись положения равновесия. Поскольку собственные движения в таких системах затухают, начальные условия влияют лишь на то, какой из нескольких возможных типов периодического движения установится в системе.

Сейчас мы перейдем к рассмотрению более общих типов движения в системах с одной степенью свободы под действием силового периодического возмущения - квазипериодических движений. Начнем с рассмотрения таких движений в консервативных системах. Для них почти при любых начальных условиях движение в отсутствие внешней силы (собственное движение) является периодическим, а его частота Ω определяется начальными условиями. Естественно допустить, что при воздействии на такую систему слабой гармонической силы частоты ω спектр движения системы будет содержать как компоненты невозмущенной частоты и ее гармоник, так и компоненту на частоте возмущения. Ее выделение представляет специальный интерес.

§ 10.01 Восприимчивость к слабой гармонической силе

◆ Рассмотрим модель, описывающую одномерное движение частицы (массы $\mu = 1$) в поле с потенциалом $U(x)$ под действием слабой гармонической силы. Уравнение движения такой модели имеет вид

$$\ddot{x} + \frac{dU}{dx} = F\cos\omega t. \tag{1}$$

В отсутствие внешней силы невозмущенный закон движения $x_0(t,E)$ почти при всех начальных условиях является периодическим и может быть представлен в виде разложения в ряд Фурье (см. L01)

$$x_0(t,E) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_s \exp(is\Omega t), \tag{2}$$

где фурье-амплитуды X_s и частота движения Ω являются, в общем случае, функциями энергии. Если амплитуда внешней силы F достаточно мала, то можно допустить, что изменение закона движения системы также будет малым. Представим закон возмущенного движения в виде

$$x(t) = x_0(t) + \xi(t). \tag{3}$$

Поправку $\xi(t)$ будем называть ***откликом*** на гармоническое поле. Подставляя (3) в (1) и линеаризуя получившееся уравнение относительно ξ, приходим к линейному неоднородному уравнению

$$\ddot{\xi}+\frac{d^2U}{dx^2}\xi=F\cos\omega t, \qquad (4)$$

в котором коэффициент U_{xx} является периодической функцией времени. Для определения частного решения системы (4), пропорционального величине силы и изменяющегося с частотой внешнего поля, необходимо отыскать фундаментальную систему решений однородного уравнения, получающегося из (4) при $F=0$ - два его независимых решения [Э65, с.100; К71, с. 97].

Э65 Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., Наука, 1965. - 424 с.

К71 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.; Наука, 1971. - 576 с.

В качестве таких решений можно взять функции

$$y_1(t)=\frac{dx_0}{dt}, \qquad y_2(t)=\frac{dx_0}{dE}, \qquad (5)$$

в чем легко убедиться, продифференцировав уравнение невозмущенного движения

$$\ddot{x}_0+\frac{dU}{dx}=0 \qquad (6)$$

по времени и по энергии и сравнив полученные выражения с уравнением (4). Независимость решений y_1 и y_2 можно установить, продифференцировав закон сохранения полной энергии невозмущенной системы,

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2+U(x)=E, \qquad (7)$$

по энергии E. В итоге получается выражение

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dE}+\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dE}=1=y_1\dot{y}_2-\dot{y}_1y_2, \qquad (8)$$

представляющее собой вронскиан решений y_1 и y_2, тождественно равный единице - и потому всегда отличный от нуля.

Интегрируя уравнение (4) методом вариации постоянных [Э65, с.116, К71, с.144] и подставляя в правые части выражений (5) разложение невозмущенного движения в ряд Фурье (2), получим частное решение в виде

$$\xi(t)=\alpha(\omega)F\cos\omega t. \qquad (9)$$

Отклик консервативной динамической системы (1) на слабую гармоническую силу представляет собой гармоническое колебание с частотой внешней силы, амплитуда которого пропорциональна величине внешней силы. Коэффициент пропорциональности называется ***линейной восприимчивостью*** системы (1) в состоянии с заданной энергией E; он имеет вид

$$\boxed{\alpha(\omega)=2\Omega\sum_{s=1}^{\infty}\frac{d}{dE}\left(\frac{s^2|X_s|^2\Omega}{s^2\Omega^2-\omega^2}\right)}. \tag{10}$$

Приведенное выражение для линейной восприимчивости впервые получено в работе [ГПЮ67]

ГПЮ67 - Гапонов А.В., Петелин М.И., Юлпатов В.К. "Индуцированное излучение возбужденных классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике." Изв. вузов - Радиофиз. 1967, т.X, №9-10, с.1414-53

◆ Пример 1. Найдем линейную восприимчивость гармонического осциллятора. Свободное движение в этой модели представляет собой гармоническое колебание (отличны от нуля только фурье-амплитуды $X_1=X_{-1}^*$), а частота колебаний не зависит от энергии: $\Omega=\mathrm{const}$. Выражение (10) упрощается и принимает вид

$$\alpha(\omega)=\frac{2\Omega^2}{\Omega^2-\omega^2}\frac{d}{dE}\left(|X_1|^2\right). \tag{11}$$

Поскольку $|X_1|^2=E/2\Omega^2$, из формулы (11) получаем

$$\alpha(\omega)=\frac{1}{\Omega^2-\omega^2} \tag{12}$$

Линейная восприимчивость гармонического осциллятора не зависит от его энергии. Она положительна на низких частотах $(\omega<\Omega)$ и отрицательна на высоких $(\omega>\Omega)$. На резонансной частоте $\omega=\Omega$ восприимчивость $\alpha(\omega)$ имеет полюс первого порядка.

◆ Пример 2. Найдем линейную восприимчивость частицы в потенциальном ящике - поле с потенциалом

$$U(x)=0 \quad (|x|<a), \qquad U(x)=\infty \quad (|x|>a) \tag{13}$$

В противоположность предыдущему примеру, у этой системы фурье-амплитуды движения не зависят от энергии (см. (01.10)), а частота зависит:

$$\Omega=\frac{\pi}{2a}\sqrt{2E} \tag{14}$$

Выражение (10) в этом случае принимает вид

$$\alpha(\omega)=-2\Omega\frac{d\Omega}{dE}\sum_{s=1}^{\infty}s^2|X_s|^2\frac{s^2\Omega^2+\omega^2}{\left(s^2\Omega^2-\omega^2\right)^2} \tag{15}$$

Линейная восприимчивость частицы в потенциальном ящике **отрицательна на всех частотах.** ♦ Этот вывод часто вызывает недоверие, особенно в приложении к постоянному полю: под действием силы $F>0$, влекущей частицу вправо - она смещается (в среднем) влево. Тут все правильно: в области $x>0$, где потенциальная энергия частицы $U=-Fx$ меньше, ее кинетическая энергия, а с нею и скорость больше, чем в области $x<0$. Следовательно, частица больше времени проводит в области $x<0$, что и ведет к неравенству $\langle x\rangle<0$.

На резонансных частотах $\omega=s\Omega$ линейная восприимчивость частицы в потенциальном ящике имеет полюс второго порядка.

◆ Рассмотренные примеры показывают, что для систем общего вида зависимость фурье-амплитуд от частоты ответственна за вклады с полюсами первого порядка, имеющих разные знаки по обе стороны от резонансной частоты, а неизохронность (зависимость частоты движения от энергии) ответственна за возникновение вкладов с полюсами второго порядка, имеющих одинаковые знаки по обе стороны от резонансной частоты.

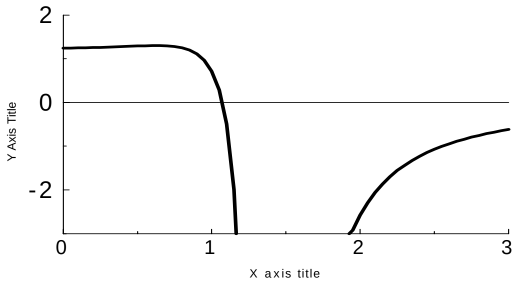

Рис. 10.1
Зависимость от частоты линейной восприимчивости консервативного осциллятора Дуффинга D_{1+} в состоянии с энергией $E=1$. Частота невозмущенного движения системы $\Omega = 1.381$.

Вблизи резонансов $\omega = s\Omega$ всегда доминируют члены второго типа. Отметим, что при **любой**, сколь угодно малой величине силы F вблизи резонансов существует область частот, в которой основная предпосылка использованного подхода - предположение о малости отклика в сравнении с невозмущенным движением - нарушается. Поведение системы под действием резонансного поля требует отдельного рассмотрения.

§ 10.02 Консервативный нелинейный резонанс

◆ Рассмотрим движение консервативного осциллятора Дуффинга D_{1+} под действием слабой гармонической силы $F << 1$, частота которой близка к собственной частоте малых колебаний, $\omega \approx 1$. Отклонение частоты возмущения от резонанса удобно характеризовать параметром

$$\Delta = \frac{\omega^2 - 1}{2}. \qquad (16)$$

При $\omega \approx 1$ $\Delta \approx \omega - 1$, поэтому мы будем называть Δ расстройкой. Решение уравнения движения

$$\ddot{x} + x + x^3 = F\cos\omega t \qquad (17)$$

будем искать в виде модулированного гармонического колебания на частоте внешней силы

$$x(t) = q(t)\cos\omega t + p(t)\sin\omega t \qquad (18)$$

Функции $q(t)$ и $p(t)$ будем называть медленными амплитудами. Подставляя (18) в (17), пренебрегая членами, содержащими вторые производные ($\ddot{q}$ и $\ddot{p}$) медленных амплитуд по времени и собирая коэффициенты при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, получаем систему уравнений движения для медленных амплитуд

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -\frac{2\Delta}{\omega}p + \frac{3}{4\omega}\left(q^2+p^2\right)p, \\ \dot{p} &= \frac{F}{\omega} + \frac{2\Delta}{\omega}q - \frac{3}{4\omega}\left(q^2+p^2\right)q. \end{aligned} \tag{19}$$

Эти уравнения представляют медленные амплитуды как динамические переменные двумерной автономной системы. Более того, эти уравнения образуют систему канонических уравнений для гамильтониана

$$H(p,q) = T(p,q) + V(q), \tag{20}$$

где $T(p,q)$ есть зависящая как от импульса, так и от координаты кинетическая энергия системы,

$$T(p,q) = -\frac{\Delta}{\omega}p^2\left[1 - \frac{3}{16\Delta}\left(2q^2+p^2\right)\right], \tag{21}$$

а $V(q)$ есть зависящая только от координат потенциальная энергия:

$$V(q) = -\frac{F}{\omega}q - \frac{\Delta}{\omega}q^2 + \frac{3}{16\omega}q^4. \tag{22}$$

Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением области малых расстроек, в дальнейшем в выражениях (19) - (22) будем заменять ω на 1.

◆ Неподвижные точки системы (19), соответствующие периодическим движениям системы с частотой, равной частоте внешней силы, лежат на линии $p=0$ в точках, где потенциал $V(q)$ имеет экстремум. Последние определяются корнями кубического уравнения

$$q^3 - \frac{8}{3}\Delta q - \frac{4}{3}F = 0 \tag{23}$$

Это уравнение всегда имеет по крайней мере один вещественный корень. Наличие дополнительных вещественных корней зависит от знака дискриминанта уравнения, который равен

$$\mathbf{T}(\Delta,F) = -\left(\frac{8}{9}\Delta\right)^3 + \frac{4}{9}F^2. \tag{24}$$

Таким образом, при заданной величине внешней силы F и (положительной) расстройке, превосходящей значение

$$\Delta_c = \left(\frac{81}{128}\right)^{1/3}F^{2/3} = 0.858F^{2/3} \tag{25}$$

потенциал $V(q)$ имеет три точки экстремума, а система (19) - три неподвижных точки.

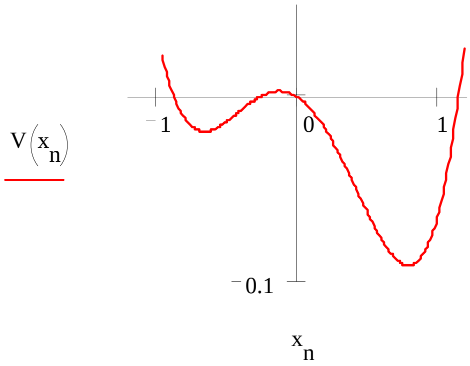

Рис. 10.2
Вид эффективного потенциала $V(q)$ для консервативного осциллятора Дуффинга D_{1+} под действием гармонической силы величины $F = 0.05$ при расстройке $\Delta = 0.2 = 1.72\Delta_c$.

◆ Определим типы этих неподвижных точек. Для консервативных систем (а система (19), как автономная гамильтонова, относится к таковым) возможны неподвижные точки двух типов - центры и седла. Для отнесения точки к этим типам достаточно рассмотреть определитель $D(\hat{M})$ матрицы стабильности связанный с ее собственными значениями соотношением $D(\hat{M}) = \lambda_1\lambda_2$ (см. (§4.04)). Для центров $D(\hat{M}) > 0$, а для седел $D(\hat{M}) < 0$. Определитель матрицы стабильности системы (~~18~~) для точек, лежащих на оси $p = 0$, есть

$$D = \frac{27}{16}\left(q^2 - \frac{8}{3}\Delta\right)\left(q^2 - \frac{8}{9}\Delta\right) \tag{26}$$

Пусть $\Delta >> F$. Тогда корни кубического уравнения (21) приближенно равны

$$q_1 \approx \sqrt{\frac{8}{3}\Delta} + \frac{F}{4\Delta}, \qquad q_2 \approx -\sqrt{\frac{8}{3}\Delta} + \frac{F}{4\Delta}, \qquad q_3 \approx -\frac{F}{2\Delta} \tag{27}$$

Подстановкой этих значений в (26) приходим к выводу: точки $\{q_1, 0\}$ и $\{q_3, 0\}$ являются центрами; в их окрестности система (19) совершает орбитально устойчивое периодическое движение [а система (17) -двухчастотное квазипериодическое движение]. Частота медленного движения определяется начальными условиями для переменных q и p. Точка $\{q_2, 0\}$ является седлом. Линия уровня гамильтониана (20), соответствующая седловому значению энергии,

$$E_s \approx -\frac{4}{3}\Delta^2 - F\sqrt{\frac{8}{3}\Delta}, \tag{28}$$

является сепаратрисой, которая делит фазовую плоскость $\{q, p\}$ на три области. Область, содержащая точку $\{q_1, 0\}$, является консервативным нелинейным резонансом.

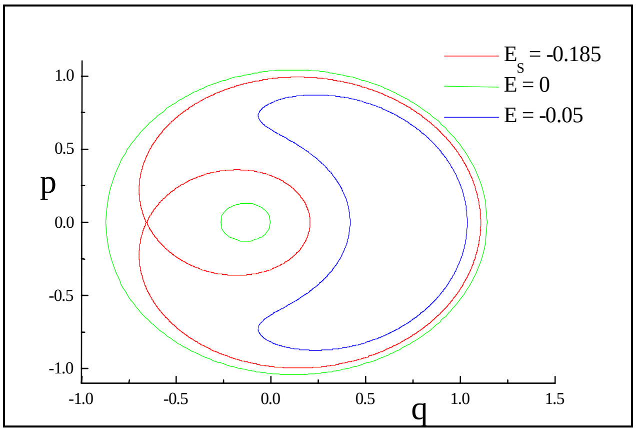

Рис. 10.3
Фазовый портрет системы медленных амплитуд для консервативного осциллятора Дуффинга D_{1+} под действием гармонической силы величины $F = 0.05$ при расстройке $\Delta = 0.2 = 1.72\Delta_c$.

Отметим, что точка $\{q_3, 0\}$ описывает нерезонансное решение, которое может быть просто определено пренебрежением нелинейным членом в уравнении движения - заменой осциллятора Дуффинга на гармонический осциллятор (ср. (12)).

☯