ЛЕКЦИЯ #09
КОЛЕБАНИЯ В ДВУМЕРНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ
ДИССИПАТИВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗОНАНСЫ

§ 9.01 Устойчивость периодического движения

◆ Для исследования устойчивости периодических колебаний используем метод медленно меняющихся амплитуд. Подставим в уравнение движения

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + x^3 = F\cos\omega t\,. \tag{1}$$

решение вида

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{2}$$

считая, что амплитуды a и b суть **медленно меняющиеся** функции времени. Пренебрегая вторыми производными по времени от a и b и малыми членами второго порядка типа $\gamma\dot{a}$ и $\gamma\dot{b}$ и собирая коэффициенты при функциях $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, получим систему уравнений

$$\dot{a} = \frac{1}{2\omega}\left[\left(1+\frac{3}{4}A^2-\omega^2\right)b - 2\gamma\omega a\right], \tag{3}$$

$$\dot{b} = -\frac{1}{2\omega}\left[\left(1+\frac{3}{4}A^2-\omega^2\right)a + 2\gamma\omega b - F\right], \tag{4}$$

Найденные в предыдущей лекции значения a и b описывают неподвижные точки этой системы. Для исследования устойчивости этих точек необходимо вычислить собственные значения матрицы устойчивости $\hat{M}$ (см. §4.03) в этих точках. Для некоторого упрощения выражений выберем в качестве единицы времени величину $T = (2\omega)^{-1}$. Вычисляя элементы матрицы $\hat{M}$, получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4\gamma\omega\lambda + \frac{27}{16}A^4 + 3A^2\left(1-\omega^2\right) + 4\gamma^2\omega^2 + \left(1-\omega^2\right)^2 = 0 \tag{5}$$

где $A^2 = a^2 + b^2$. Неподвижные точки, для которых собственные значения матрицы устойчивости определяются уравнением

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{6}$$

неустойчивы, если хотя бы одно собственное значение имеет **положительную** действительную часть. Следовательно, область неустойчивости есть **объединение** областей, в которых $p < 0$ или $q < 0$. Для уравнения (5) это приводит к выражениям для границ областей неустойчивости

$$4\gamma\omega = 0 \qquad (7)$$

и

$$\frac{27}{16}A^4 + 3A^2\left(1-\omega^2\right) + 4\gamma^2\omega^2 + \left(1-\omega^2\right)^2 = 0 \qquad (8)$$

Уравнение (7) не приводит к содержательным ограничениям. Уравнение (8) описывает ~~гиперболу~~ на плоскости "переменная - параметр" $\{A,\omega\}$ кривую, имеющую вид искривленной параболы.

Уравнение (8) **совпадает** с полученным в § 8.04 уравнением (33), определяющим бифуркационные значения частоты $\omega_\pm$. Таким образом, точки бифуркации всегда лежат на границе области устойчивости стационарных значений амплитуд, заданной уравнением (8). Поэтому в области параметров, где амплитуда периодических колебаний имеет три возможных значения, максимальное и минимальное соответствуют устойчивым периодическим движениям, а промежуточное - неустойчивому.

Таким образом, мы доказали, что в интервале частот $\omega_- < \omega < \omega_+$ осциллятор Дуффинга с малым затуханием, находящийся под действием внешней силы, зависящей от времени по гармоническому закону, является бистабильной системой.

§ 9.02 Уточнение решения: третья гармоника

◆ В предыдущей лекции мы представляли решение в виде

$$x_0(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t. \qquad (9)$$

Уточним теперь это решение, представив закон движения в виде

$$x(t) = x_0(t) + \xi(t) \qquad (10)$$

где $\xi(t)$ - малая поправка. Подставив это решение в (1) и учитывая, что при определении (9) учтены все члены на первой гармонике, для поправки получим уравнение

$$\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + \xi = \frac{1}{4}\left(a^3 - 3ab^2\right)\cos 3\omega t + \frac{1}{4}\left(3a^2b - b^3\right)\sin 3\omega t \qquad (11)$$

Это - уравнение колебаний линейного осциллятора с вязким трением под действием гармонической силы. Его решение, которое можно представить в виде

$$\xi(t) = c\cos 3\omega t + d\sin 3\omega t, \qquad (12)$$

определяет третью гармонику в законе движения нелинейного осциллятора при установившихся колебаниях под действием гармонической силы. Подставляя решение (12) в (11) и приравнивая коэффициенты при $\cos 3\omega t$ и $\sin 3\omega t$, получаем систему линейных уравнений

$$\left(1-9\omega^2\right)c + 6\gamma\omega d = \frac{1}{4}\left(a^3 - 3ab^2\right) \qquad (13)$$

$$\left(1-9\omega^2\right)d-6\gamma\omega c=\frac{1}{4}\left(3a^2b-b^3\right) \tag{14}$$

Возводя эти уравнения в квадрат и складывая, для амплитуды $C=\sqrt{c^2+d^2}$ третьей гармоники установившихся колебаний получаем выражение

$$C=\frac{A^3}{4\sqrt{\left(9\omega^2-1\right)^2+36\gamma^2\omega^2}} \tag{15}$$

где A - амплитуда первой гармоники колебаний. Отношение C/A всегда мало: так, в условиях примера, показанного на рис. 08.1 $C/A\le 0.0442$; расчет по формуле (15) дает $C/A\le 0.0293$. Поэтому пренебрежение высшими гармониками при выводе уравнений для a и b оправдано, а основанные на них расчеты имеют достаточно высокую точность. Из формулы (15) видно, что предположение о малости отношения C/A может быть нарушено при $\omega\approx 1/3$ и достаточно малом затухании, когда знаменатель правой части становится мал. Этот случай супергармонического резонанса должен быть рассмотрен отдельно.

◆◆ Для описания периодического движения в диссипативной системе под периодическим воздействием эффективны простейшие кинематические модели - гармонического колебания (9), медленно модулированного гармонического колебания (2) и слабо ангармонического периодического колебания (10).

Необходимое для исследования устойчивости движения использование модели медленно модулированного гармонического колебания сводит задачу к модели двумерной автономной системы, которая изучается известными методами (см. L04).

§ 9.03 Моды и конечномодовые приближения

◆ Если закон движения $x(t)$ представляется в виде

$$x(t)=\sum_{k=1}^{M}A_k f_k(t) \tag{16}$$

где $f_k(t)$ - известные функции, то

- эти функции называются ***модами*** (от латинского modus: здесь - тип, образец);
- коэффициенты A_k называются ***амплитудами мод***;
- параметр M называется ***числом мод***;
- форма (16) называется M***-модовым приближением***.

◆ Для описания свойств диссипативного нелинейного резонанса в системе

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + x^3 = F\cos\omega t. \tag{17}$$

в L08 мы использовали двухмодовое синхронное приближение

$$x_0(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t. \tag{18}$$

в котором частоты мод **совпадали** с частотой внешнего воздействия. Стандартная процедура подстановки (18) в уравнение движения (17), фурье-разложения и приравнивания коэффициентов при модах приводят к системе "кубических" (трилинейных) уравнений (08.23),(08.24), решения которых отыскивались с помощью искусственных приемов. В §9.02 решение (18) было уточнено с помощью теории возмущений - добавлены **малые** члены с утроенной частотой.

◆ Найденное таким способом решение не описывает всех возможных периодических движений в системе (17). Во-первых, частота движения Ω может составлять кратную долю частоты воздействия ω, $n\Omega = \omega$ - так называемый субгармонический резонанс порядка n (важнейшим для модели (2) является случай $n = 3$). Во-вторых, выбор в качестве нулевого приближения двухмодового синхронного приближения (18) предполагает малость амплитуд отброшенных высших гармоник. Это предположение может нарушаться, если частота движения Ω кратна частоте воздействия ω - так называемый супергармонический резонанс порядка n $\Omega = n\omega$ (важнейшим для модели (2) является случай $n = 3$: см. (15)). Описание соответствующих законов движения, существенно отличающихся от найденных в L08, возможно при использовании четырехмодового приближения

$$x_0(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t + c\cos 3\omega t + d\sin 3\omega t \tag{19}$$

и записи возмущения в виде $F\cos 3\omega t$ для субгармонического и $F\cos\omega t$ для супергармонического случаев. Прямое использование стандартной процедуры приведет к системе четырех трилинейных уравнений для амплитуд a, b, c и d. Исключение всех переменных кроме одной (например, a) даст для a уравнение высокой (81-й ?) степени, исследование которого аналитическими средствами безнадежно, а численными - обременительно. Задача упрощается в случае, когда затухание γ можно считать пренебрежимо малым параметром. Поскольку амплитуды квадратурных компонент b и d при этом оказываются малы (обращаются в ноль при $\gamma \to 0$), в качестве нулевого можно использовать двухмодовое приближение

$$x_0(t) = a\cos\omega t + c\cos 3\omega t. \tag{20}$$

Основываясь на этом, в следующих параграфах мы исследуем простейшие движения в субгармоническом и супергармоническом резонансах модели (17).

§ 9.04 Субгармонический резонанс в диссипативном осцилляторе Дуффинга: пренебрежимо малое затухание

◆ ***Субгармоническим резонансом*** порядка n в неавтономной системе с периодическим воздействием называется область параметров, в которой существует периодическое движение с частотой в n раз **меньше** частоты поля. Рассмотрим субгармонический резонанс третьего порядка для диссипативного осциллятора Дуффинга, уравнение движения которого запишем в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + x^3 = F\cos 3\omega t, \tag{21}$$

чтобы сохранить обозначение ω за частотой движения. В дальнейшем мы будем считать силу умеренной, $F \le 1$, и будем рассматривать область частот, недалеко отстоящих от частоты малых колебаний: $0 \le \omega^2 - 1 \le 1$.

◆ Начнем со случая, когда затухание γ можно считать пренебрежимо малым. Тогда решение уравнения

$$\ddot{x} + x + x^3 = F\cos 3\omega t \tag{22}$$

можно представить в виде суперпозиции первой и третьей гармоники

$$x(t) = \xi(t) + \eta(t) = a\cos\omega t + c\cos 3\omega t, \tag{23}$$

пренебрегая сдвинутыми по фазам компонентами. В нулевом приближении пренебрежем нелинейным членом в левой части (22). Тогда компоненту с частотой 3ω можно описать как вынужденные колебания линейного осциллятора с пренебрежимо малым затуханием:

$$\eta(t) = c\cos 3\omega t = -\frac{F}{9\omega^2 - 1}\cos 3\omega t \tag{24}$$

Подставив решение в виде $x(t) = \xi(t) + \eta(t)$ в уравнение (22), для функции $\xi(t)$ получим уравнение

$$\ddot{\xi} + \xi + \xi^3 = -\eta^3 - 3\eta^2\xi - 3\eta\xi^2 \tag{25}$$

Подставляя в правую часть выражения для $\xi(t)$ и $\eta(t)$ (24) и сохраняя только члены с частотой ω, получим уравнение

$$\ddot{\xi} + \xi + \xi^3 = -\frac{3}{4}\left(2ac^2 - a^2c\right)\cos\omega t \tag{26}$$

Теперь задача определения движения свелась к рассмотренной ранее (L08) задаче о движении нелинейного осциллятора Дуффинга (с пренебрежимо малым затуханием) с амплитудой силы

$$\widetilde{F} = -\frac{3}{4}\left(2ac^2 - a^2c\right) \tag{27}$$

Из уравнения (~~25~~) (ср. (08.23)) получаем квадратное уравнение для a

$$1+\frac{3}{4}a^2-\omega^2+\frac{3}{4}c(2c-a)=0 \tag{28}$$

корни которого даются формулой

$$\boxed{a=\frac{c}{2}\pm\sqrt{\frac{4}{3}\left(\omega^2-1\right)-\frac{7}{4}c^2}} \tag{29}$$

♦ Методом, использованным в §9.01, можно показать, что устойчивым является только решение, которому соответствует знак "−" перед корнем: соответствующая амплитуда всегда отрицательна.

Корни уравнения (29) вещественны, если частота возмущения 3ω превосходит пороговую частоту, приближенно равную

$$3\omega_c=3\left(1+\frac{21}{2048}F^2\right) \tag{30}$$

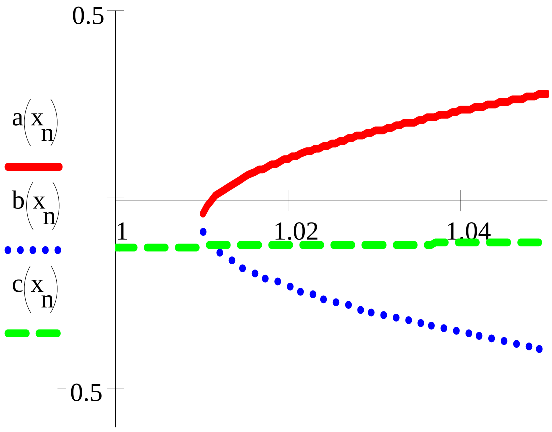

Рис. 09.1
Зависимости амплитуд первой (сплошная и пунктирная линии) и третьей (штриховая линия) гармоник движения вблизи порога субгармонического резонанса в осцилляторе Дуффинга с пренебрежимо малым трением при $F=1$.

Из условия положительности подкоренного выражения в (29) получаем также границу области существования субгармонического резонанса на плоскости переменных $\{F,\omega\}$ в системе с пренебрежимо малым трением: такой резонанс существует при $\omega>1$, если сила не превосходит значения

$$F_l=\frac{4}{\sqrt{21}}\sqrt{\omega^2-1}\left(9\omega^2-1\right)\approx 6.983\sqrt{\omega^2-1} \tag{31}$$

На пороге субгармонического резонанса амплитуда первой гармоники **конечна** и равна половине амплитуды третьей гармоники - коэффициент ангармонизма колебаний $\nu=4$. (см. L01, рис. 01.2).

§ 9.05 Субгармонический резонанс в диссипативном осцилляторе Дуффинга: конечное затухание

◆ Рассмотрим теперь субгармонический резонанс с учетом конечной величины затухания. Движение можно приближенно описать законом

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t + c\cos 3\omega t \tag{32}$$

Поскольку с ростом частоты амплитуда первой гармоники быстро растет, а амплитуда третьей медленно падает, можно пренебречь в выражении для возмущающей силы (27) первым слагаемым и рассмотреть задачу о движении диссипативного осциллятора Дуффинга под действием вынуждающей силы

$$\tilde{F} = \frac{3}{4}A^2 c \tag{33}$$

где A - фурье-амплитуда первой гармоники движения ($A^2 = a^2 + b^2$). Из уравнения (08.25) получаем

$$\left(1 + \frac{3}{4}A^2 - \omega^2\right)^2 A^2 + 4\gamma^2\omega^2 A^2 = \frac{9}{16}A^4 c^2 \tag{34}$$

✧ Возможность использовать это уравнение оправдана предположением о малости затухания. Поэтому амплитуда квадратурной компоненты мала, $b \ll a$, и можно пренебречь в правой части членом, пропорциональным abc, по сравнению с $a^2 c$.

Нетривиальные (отличные от нуля) корни уравнения (18) определяются биквадратным уравнением, которое подстановкой $z = A^2$ сводится к квадратному

$$z^2 + z\left[\frac{8}{3}\left(1-\omega^2\right) - c^2\right] + \frac{16}{9}\left(1-\omega^2\right)^2 + \frac{64}{9}\gamma^2\omega^2 = 0 \tag{35}$$

Корни этого уравнения вещественны, если положителен дискриминант

$$\mathrm{D}(F,\omega) = c^4 + \frac{16}{3}c^2\left(\omega^2 - 1\right) - \frac{256}{9}\gamma^2\omega^2 \tag{36}$$

Поскольку в области, которую мы исследуем, $c \ll 1$, то первым членом в этом выражении можно пренебречь. Тогда условие положительности дискриминанта приобретает вид

$$c^2\left(\omega^2 - 1\right) \ge \frac{16}{3}\gamma^2\omega^2 \tag{37}$$

Используя выражение (24) для c, находим, что уравнение (35) имеет вещественные) корни, если сила больше значения

$$F_{-} = \gamma \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - 1}}\left(9\omega^2 - 1\right) = \gamma\,\Phi(\omega) \tag{38}$$

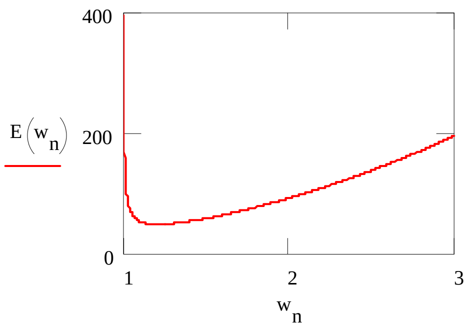

Рис. 09.2
Функция $\Phi(\omega)$, определяющая границу области существования субгармонического резонанса в диссипативном осцилляторе Дуффинга.

Функция $\Phi(\omega)$ в правой части (38) при значении частоты

$$\omega_- = \sqrt{\frac{9+\sqrt{73}}{12}} = 1.209 \tag{39}$$

имеет минимум, равный $\Phi(\omega_-) = 49.948$. Таким образом, для возникновения субгармонического резонанса в системе с затуханием амплитуда внешней силы должна превосходить критическое значение

$$\boxed{F_c = 50\gamma}. \tag{40}$$

Если $F >> F_c$, то, используя асимптотики функции F_-

$$F_- \approx \gamma \frac{32}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega - 1}} \qquad (\omega - 1 << 1) \tag{41}$$

$$F_- \approx \gamma \frac{36}{\sqrt{3}} \cdot \omega^2 \qquad (\omega >> 1) \tag{42}$$

можно найти границы области субгармонического резонанса. Такой резонанс существует в полосе частот $\omega_L < \omega < \omega_R$, где

$$\boxed{\omega_L \approx 1 + \frac{1}{14.6}\left(\frac{F_c}{F}\right)^2, \qquad \omega_R \approx 1.55\sqrt{\frac{F}{F_c}}} \tag{43}$$

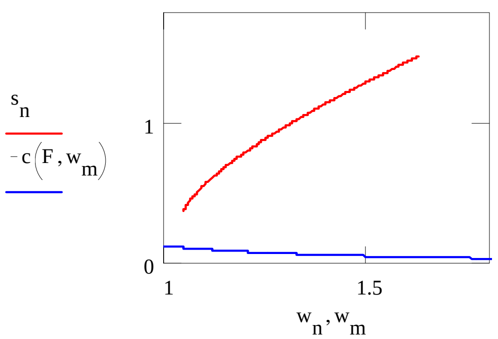

Рис. 09.3
Фурье-амплитуды первой (верхняя линия) и третьей (нижняя линия) гармоник движения при субгармоническом резонансе в осцилляторе Дуффинга с $\gamma = 0.015$ и $F = 1.0 = 1.33F_c$. Резонанс существует при $1.05 \le \omega \le 1.62$.

Амплитуда первой гармоники конечна всюду в области существования резонанса и всюду, как и было предположено при выводе формулы (33), существенно превосходит амплитуду третьей гармоники. Отметим, что в условиях рассматриваемого примера зависимость $A(\omega)$, заданная уравнением (34), **во всей** области субгармонического резонанса **хорошо** описывается полученной в пренебрежении затуханием формулой (29): средняя относительная погрешность такого приближения равна 0.7%.

◆ Отметим, что в области существования субгармонического резонанса третьего порядка обязательно существует также устойчивое решение, соответствующее нижней (нерезонансной) ветви нелинейного резонанса, рассмотренного в L08.

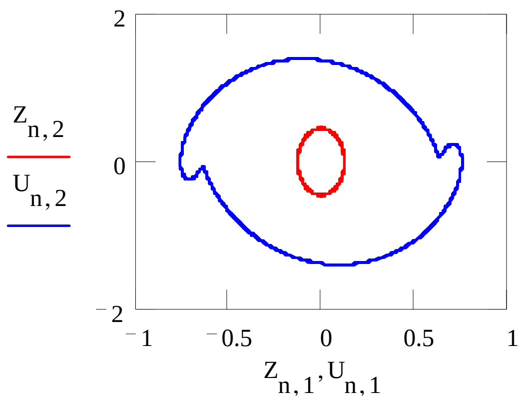

Рис. 09.4
Проекции на фазовую плоскость $x - \dot{x}$ фазовых траекторий периодических движений осциллятора Дуффинга с $\gamma = 0.015$ и $F = 1.5$ и $\omega = 1.2$. Внутренняя линия - нерезонансное движение, внешняя - движение в субгармоническом резонансе.

Хотя фурье-амплитуды этих движений на частоте действующей силы (3ω) близки, движение в субгармоническом резонансе проходит в существенно более обширной области фазового пространства (см. рис. 09.4). Кроме того, эти решения сильно различаются по степени ангармонизма.

◆◆ Для описания периодических движений типа субгармоничского резонанса в диссипативном осцилляторе Дуффинга под периодическим воздействием в случае пренебрежимо малого затухания эффективно использование двухмодового приближения (23).

В этом приближении возможно последовательное определение амплитуд - амплитуда нерезонансной моды находится из модели линейного осциллятора (24) , после чего задача сводится к исследованию основного нелинейного резонанса под воздействием возмущения, величина которого зависит от амплитуд мод [(27) и (33)], что позволяет определить амплитуду резонансной моды решением квадратных уравнений [(28) и (35)].

Хотя такой подход есть суррогат самосогласованного решения системы уравнений для всех учтенных амплитуд мод, его результаты достаточно точны.

☯