

## ЛЕКЦИЯ #06

### ДВУМЕРНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ - 2

### ДВУМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ С ПРЕДЕЛЬНЫМИ ЦИКЛАМИ

#### § 6.01 Частота малых колебаний

- ◆ Рассмотрим частоту малых колебаний ( $E \ll 1$ ) для осциллятора Дуффинга  $D_{1+}$

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0. \quad (1)$$

Поскольку амплитуды всех гармоник, кроме основной, в этом случае малы (см. L01), традиционным и удобным способом описания является выражение характеристик движения не через энергию, а через **амплитуду** основной фурье-компоненты движения  $A \equiv a_1$ .

- ◆ Рассмотрим **метод оптимальной линеаризации**. Аппроксимируем уравнение движения (1) уравнением движения гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0 \quad (2)$$

с подлежащей определению частотой  $\Omega$ . Потребуем, чтобы среднее значение квадрата разности  $\Delta(\Omega)$  сил, входящих в нелинейное уравнение (1) и линейное уравнение (2), было минимально. Выражение для  $\Delta(\Omega)$  имеет вид

$$\overline{(\Omega^2 x - x - x^3)^2} \equiv \Delta(\Omega) = \beta^2 \overline{x^2} - 2\beta \overline{x^4} + \overline{x^6} \quad (3)$$

где  $\beta = \Omega^2 - 1$ , а горизонтальная черта обозначает усреднение по времени (или по периоду). Минимуму  $\Delta(\Omega)$  соответствует значение

$$\Omega^2 = 1 + \overline{x^4} \cdot (\overline{x^2})^{-1} \quad (4)$$

Будем считать движение  $x(t)$  гармоническим колебанием с амплитудой  $A$ :

$$x(t) = A \sin \omega t \quad (5)$$

Тогда для средних значений, входящих в формулу (3), получаем

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2} A^2, \quad \overline{x^4} = \frac{3}{8} A^4 \quad (6)$$

и окончательно получаем выражение для частоты колебаний как функции (малой) амплитуды:

$$\boxed{\Omega \approx 1 + \frac{3}{8} A^2} \quad (7)$$

Учитывая, что при малых значениях энергии осциллятор Дуффинга мало отличается от гармонического осциллятора, можно положить  $E \approx A^2/2$  и получить зависимость частоты от полной энергии в виде

$$\Omega \approx 1 + \frac{3}{4} E \quad (8)$$

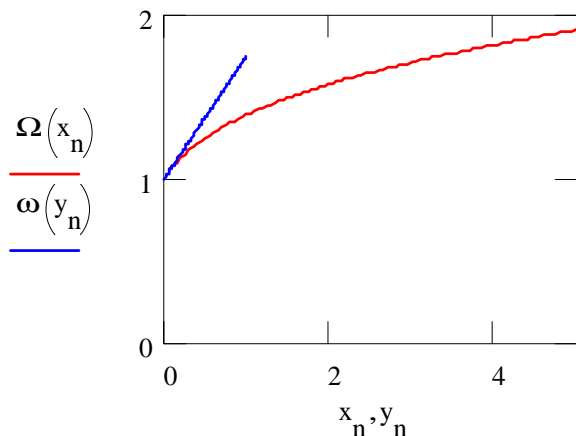


Рис. 06.1

Зависимость частоты колебаний осциллятора Дuffинга  $D_{1+}$  от его энергии. Штриховой линией показана асимптотика умеренных колебаний (8).

◆ Рассмотрим другой подход к выводу формулы (8), основанный на **методе исключения резонанса**. Представим уравнение движения осциллятора Дuffинга

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0 \quad (9)$$

в виде

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = (\Omega^2 - 1)x - x^3 \quad (10)$$

где  $\Omega$  - частота колебаний, подлежащая определению. Будем считать движение  $x(t)$  гармоническим колебанием с небольшой амплитудой  $A \leq 1$ :

$$x(t) = A \sin \Omega t. \quad (11)$$

Подставляя это выражение в правую часть уравнения (10), получаем уравнение

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = A \left( \Omega^2 - 1 - \frac{3}{4} A^2 \right) \sin \Omega t - \frac{1}{4} A^3 \sin 3\Omega t \quad (12)$$

Движение гармонического осциллятора с собственной частотой  $\Omega$  под воздействием гармонической силы с той же частотой описывается квазигармоническим движением с линейно растущей амплитудой (см. L01, формулу (25)). Движение двумерной интегрируемой системы (9) всегда периодически. Уравнение (12) будет иметь при любых начальных условиях решением периодическую функцию только в том случае, когда выражение для вынуждающей силы не будет содержать первой гармоники. Приравняв коэффициент при  $\sin \Omega t$  нулю, получаем для частоты уже известное выражение

$$\boxed{\Omega \approx 1 + \frac{3}{8} A^2} \quad (13)$$

Уравнение (12) позволяет также уточнить закон движения  $x(t)$ , учтя в нем компоненту третьей гармоники:

$$x(t) = A \sin \Omega t + \frac{1}{32} A^3 \sin 3\Omega t \quad (14)$$

Таким образом, при малых амплитудах колебаний (малых значениях энергии  $E \ll 1$ ) коэффициент ангармонизма (см. формулу (01.8)) колебаний осциллятора Дуффинга,

$$\nu \approx \frac{1}{1024} A^4 \approx \frac{1}{256} E^2 \quad (15)$$

растет пропорционально четвертой степени амплитуды колебаний, или квадрату энергии.

### § 6.02 Движение вблизи сепаратрисы

◆ Из четырех описанных выше стандартных моделей три (маятник и осцилляторы Дуффинга  $D_{1-}$  и  $D_2$ ) имеют седловые точки и сепаратрисы. Эти седла соответствуют неустойчивым положениям равновесия частицы в точке максимума потенциальной энергии. Рассмотрим движение системы при энергии, близкой к седловому значению. Совместим начало координат с точкой максимума, а максимум потенциальной энергии примем за начало отсчета энергии;  $\max U(x) = 0$ . Будем рассматривать движение в области  $x > 0$  с малой **отрицательной** энергией  $\varepsilon < 0$  ( $|\varepsilon| \ll 1$ ).

В окрестности максимума потенциальную энергию можно разложить до квадратичного члена ( $U(x) \approx -\kappa^2 x^2/2$ ) и описать движение системы моделью гиперболического акселератора (гармонического осциллятора с мнимой частотой):

$$\ddot{x} - \kappa^2 x = 0. \quad (16)$$

Возьмем момент остановки частицы вблизи седла за начало отсчета времени. Соответствующее решение уравнения движения (30) будет иметь вид

$$x(t) = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\kappa} \operatorname{ch} \kappa t. \quad (17)$$

Выберем точку  $A$  так, чтобы в ней можно было пользоваться уравнением (16), но чтобы  $|U(A)| \gg |\varepsilon|$ . Время достижения точки  $A$  можно найти из (17):

$$T_1(A) \approx \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{2\kappa^2}{\varepsilon} + \frac{1}{\kappa} \ln A \quad (18)$$

Для описания движения справа от точки  $A$  можно (в силу условия  $|U(A)| \gg |\varepsilon|$ ) воспользоваться законом движения на сепаратрисе. Пусть  $x_s(t)$  - закон такого движения, выбранный так, чтобы в момент  $t = 0$  частица проходит минимум потенциала. Поскольку при  $t \rightarrow -\infty$  частица должна остановиться в седловой точке, этот закон движения будет иметь асимптотику вида

$$x_s(t) \approx M e^{\kappa t}, \quad (19)$$

где  $M$  - константа, зависящая от конкретного вида потенциала. Из (19) может быть найден интервал времени движения от точки  $A$  до минимума потенциала:

$$T_2(A) \approx \frac{1}{\kappa} \ln \frac{M}{A} \quad (20)$$

Складывая выражения (18) и (20), получаем уже не зависящее от выбора  $A$  выражение для интервала времени движения от точки поворота до минимума потенциала:

$$T \approx \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{2\kappa^2 M^2}{\varepsilon} \quad (21)$$

Этот интервал - а вместе с ним и период движения - логарифмически растет с уменьшением отклонения энергии от седлового значения.

Совершенно аналогично можно показать, что ту же величину имеет интервал времени движения от максимума потенциала ( $x = 0$ ) до минимума потенциала для случая, когда частица имеет малую **положительную** энергию  $1 \gg \varepsilon > 0$ . Таким образом, для систем с квадратичным максимумом потенциала частота движения как функция малого отклонения энергии от седлового значения обращается в ноль по **логарифмическому закону**:

$$\Omega(\varepsilon) \sim \ln^{-1} \frac{1}{|\varepsilon|} \quad (22)$$

♦ **Пример 1.** Для маятника значение  $\kappa = 1$ . Закон движения маятника на сепаратрисе может быть найден элементарно:

$$\varphi(t) = 4 \operatorname{arctg}(e^t) - \pi. \quad (23)$$

Начальное условие здесь выбрано так, чтобы  $\varphi(0) = 0$ . Из сравнения с (19) находим величину  $M = 4$ . Из (21) находим асимптотику периода колебаний ( $\varepsilon < 0$ )

$$T_l \approx 2 \ln \frac{32}{|\varepsilon|} \quad (24)$$

(интервал от точки поворота до минимума потенциала проходится **четырежды**) и асимптотику периода вращений ( $\varepsilon > 0$ )

$$T_r \approx \ln \frac{32}{\varepsilon}. \quad (25)$$

(интервал от максимума до минимума потенциала проходится **дважды**).

◆◆ Для двумерной автономной интегрируемой системы основной задачей является определение зависимости частоты движения от начальных условий и параметров.

Использование квадратуры (L05/17) редко бывает лучшим способом ее решения.

Для исследования движений вблизи центра эффективно использование модели слабо ангармонического движения.

Для исследования движений, проходящих вблизи седла, эффективна аппроксимация законом движения на сепаратрисе.

Рассмотренные в предыдущих параграфах модели интегрируемых систем были консервативны. Рассмотрение двумерных интегрируемых систем закончим редким, но важным примером интегрируемой *диссипативной* системы.

### § 6.03 Модель Лотки - Вольтерра

◆ Модель Лотки - Вольтерра задается уравнениями движения

$$\frac{dX}{dt} = k_1 X - a_1 XY, \quad \frac{dY}{dt} = -k_2 Y + a_2 XY \quad (26)$$

где как динамические переменные  $X$  и  $Y$ , так и все параметры положительны.

◆ Эта модель была введена А. Лоткой [L20] для описания возможной химической реакции, в которой концентрации веществ испытывают незатухающие колебания. Позже В. Вольтерра [V31] интерпретировал ее как модель эволюции численности двух взаимодействующих биологических видов - хищников ( $Y$ ) и жертв ( $X$ ). Некоторые свойства модели рассмотрены в [Л97, с. 38-39, 89-90].

L20 - Lotka A.J. Undamped oscillations derived from the law of mass action. J. Amer. Chem. Soc., 1920, v.42, no.8, pp.1595-1599.

V31 - Volterra V. Lecons sur la Theorie Mathematique de la Lutte pour la Vie. - Paris, Gauthier-Villars, 1931.

Выбором единиц измерения переменных  $X$  и  $Y$  и масштаба времени система (1) может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-y), \\ \dot{y} = -\mu y(1-x). \end{cases} \quad (27)$$

где  $\mu$  - безразмерный управляющий параметр. Локальная диссипация этой системы

$$\Lambda(x, y) = 1 - y - \mu(1 - x) \quad (28)$$

в общем случае отлична от нуля и знакопеременна. Система (27) имеет две неподвижных точки,  $o_1 = \{0, 0\}$  и  $o_2 = \{1, 1\}$ . Точка  $o_1$  является седлом; ее характеристические показатели  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -\mu$ . Точка  $o_2$  является центром; ее характеристические показатели  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\mu}$ .

Уравнение для фазовых траекторий на фазовой плоскости имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\mu \cdot \frac{y(1-x)}{x(1-y)}. \quad (29)$$

Это уравнение допускает разделение переменных и элементарно интегрируется:

$$\mu(x - 1 - \ln x) + (y - 1 - \ln y) = E \quad (30)$$

(константы выбраны так, чтобы в неподвижной точке  $o_2 = \{1, 1\}$  значение интеграла движения  $E = 0$  при любом значении  $\mu$ ). Таким образом, интегральные кривые системы представляют собой линии уровня функции  $E(x, y; \mu)$  - замкнутые кривые, окружающие неподвижную точку - центр.

Подстановкой  $q = \ln y$ ,  $p = \ln x$  система уравнений (27) сводится к каноническому виду с гамильтонианом

$$H(p, q) = \mu(e^p - 1 - p) + (e^q - 1 - q). \quad (31)$$

В этих переменных система (как и всякая гамильтонова) является консервативной; ее энергия численно равна интегралу движения  $E$ .

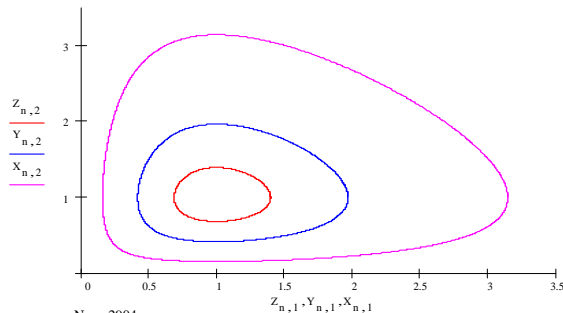


Рис. 06.2

Фазовые траектории системы Лотки - Вольтерра при  $\mu = 1$  для значений интеграла движения  $E = 0.1, 0.3$  и  $1.0$ .

◆ Аналитическое определение зависимости частоты движения модели Лотки - Вольтерра от параметра  $E$  представляет собой сложную задачу. Она была решена Фреймом [F74], который вместе с точным выражением, имеющим форму ряда, получил приближенную формулу для периода

$$T(I) = 2\pi\sqrt{\mu} I_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\mu} \frac{\sqrt{E}}{6}}\right), \quad (32)$$

где  $I_0(z)$  есть модифицированная функция Бесселя первого рода.

F74 - Frame J.S. Explicit solutions in two species Volterra system. - J. Theor. Biol. 1974, v.43, no.1, p.73-81.

Зависимость частоты движения  $\Omega$  от параметра  $E$  может быть найдена численно.

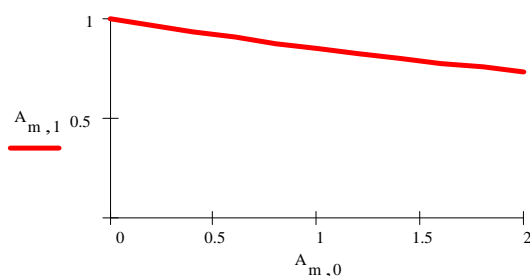


Рис. 06.3

Зависимость частоты движения  $\Omega$  системы Лотки - Вольтерра при  $\mu = 1$  от величины интеграла движения  $E$ .

Отметим, что зависимость частоты от начальных условий является довольно слабой, хотя при значении  $E = 2$  фазовая траектория сильно отличается от эллипса, а закон движения является сильно ангармоническим (см. рис. 06.4)

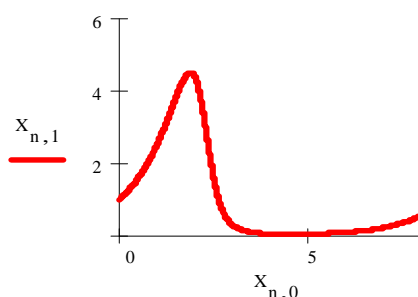


Рис. 06.4

Закон движения  $x(t)$  одной из динамических переменных системы Лотки - Вольтерра при  $\mu = 1$  и  $E = 2$  на одном периоде.

В двумерных интегрируемых системах фазовые траектории периодических движений - замкнутые кривые на фазовой плоскости - образуют семейства, сплошь заполняющие некоторую часть фазовой плоскости. Альтернативным классом являются системы с изолированными замкнутыми траекториями - предельными циклами.

### § 6.04 Предельные циклы

◆ **Предельным циклом** называется **изолированная** замкнутая фазовая траектория автономной динамической системы. Периодическое движение по такой траектории называется **автоколебаниями** динамической системы.

✧ Понятие **предельного цикла** (le **cycle limite**) введено А. Пуанкаре (H. Poincaré', 1892). Термин "**автоколебания**" введен А.А. Андроновым (1928) для обозначения движения "устройств, могущих генерировать незатухающие колебания за счет неперiodических источников энергии" [А56, с.32]. Термин переводился его автором на французский вначале как **les oscillations autoentreteneues** (1929), затем как **les autooscillations** (1930). Фактически в мировой (а значит - англоязычной) литературе термин в формах **auto-oscillations** или **self-oscillations** не закрепился. В частности, он отсутствует в статьях Британской Энциклопедии.

Наличие в фазовом пространстве **устойчивого** предельного цикла приводит к тому, что при начальных условиях, принадлежащих бассейну притяжения этого аттрактора, в системе со временем устанавливается периодическое движение, форма которого не зависит от начальных условий.

Периодические автоколебания близки по свойствам к устойчивым периодическим движениям в **неавтономных** системах с периодической зависимостью параметров от времени. В литературе можно встретить применение термина "автоколебания" и к таким движениям [РТ84, с.229-230]. Однако между ними есть и отличие: для автономных систем закон движения инвариантен при сдвиге по времени: если  $\vec{x}(t)$  - закон движения на предельном цикле, то  $\vec{x}(t + \tau)$  тоже есть закон движения на предельном цикле при любых значениях  $\tau$ . Иными словами, фаза автоколебаний автономных систем произвольна; она определяется начальными условиями. Напротив, для устойчивых периодических движений в неавтономных системах с периодической зависимостью параметров от времени фаза определена однозначно.

Основными задачами теории систем с предельными циклами являются:

- определение областей параметров, в которых циклы существуют, и характера бифуркации, приводящей к возникновению предельного цикла;
- исследование формы предельного цикла и зависимости частоты автоколебаний от параметров.

◆ В качестве первого примера модели, обладающей предельным циклом, рассмотрим **осциллятор Рэлея** - модель с уравнением движения

$$\ddot{x} - \alpha \dot{x}(1 - \dot{x}^2) + x = 0 \quad (33)$$

(динамическими переменными являются  $x$  и  $\dot{x}$ ) и одним управляющим параметром  $\alpha > 0$ .

♦ Эта модель была построена Дж.В. Стреттом, лордом Рэлеем (J.W. Strutt, third Baron Rayleigh) в 1877 г. [С55, с.101] для демонстрации возможности существования в автономной системе незатухающих колебаний, форма которых не зависит от начальных условий. Рэлей построил приближенный вид предельного цикла системы (33) при  $\alpha \ll 1$ . Доказательство существования у осциллятора Рэрея предельного цикла при любых  $\alpha$  было получено А.Г. Майером в 1935 г. [М35].

С55 Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей) Теория звука. т.1. М.: ГТТИ, 1955. - 503 с.

М35 Майер А.Г. "Доказательство существования предельных циклов у уравнений Рэрея и Ван дер Поля." Учен. записки ГГУ, 1935, вып. 2.

Наиболее распространенная в современной литературе модель осциллятора с предельным циклом - **осциллятор Ван дер Поля** с уравнением движения

$$\ddot{z} - \alpha \dot{z}(1 - z^2) + z = 0 \quad (34)$$

эквивалентна осциллятору Рэрея, так как уравнение (34) получается из (33) дифференцированием по времени и последующей заменой переменных  $z = \dot{x}/\sqrt{3}$ .

♦ Эта модель была введена Б. Ван дер Полем в 1920 г. [VdP20, ВдП35, с.11] для описания электрических колебаний в триодном генераторе с контуром в анодной цепи. Величина  $z$  имеет в физической модели-прототипе смысл переменной части анодного напряжения. В своих работах Ван дер Поль не ссылается на Рэрея.

VdP20 - Van der Pol B. A theory of the amplitude of free and forced vibrations. Radio Review, 1920, vol. 1, pp. 701-754.

ВдП35 Ван-дер-Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний. М.: Гос. изд-во по технике связи. - 1935. - 42 с.

♦ Перепишем уравнение (33) в виде системы уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \alpha y(1 - y^2) - x. \quad (35)$$

Эта система инвариантна при замене переменных  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ . Поэтому все фазовые траектории инвариантны при инверсии координат. Единственная неподвижная точка системы (35) - (0,0) - неустойчива при любых  $\alpha > 0$ . Рассмотрим эволюцию величины  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$  - расстояния фазовой точки от начала координат. Из уравнений (35) следует

$$\frac{dR^2}{dt} = 2\alpha y^2(1 - y^2). \quad (36)$$

Правая часть положительна внутри полосы  $|y| < 1$ . Следовательно, если в начальный момент фазовая точка находилась от начала координат на расстоянии  $R < 1$  - то с течением времени расстояние будет увеличиваться, и точка покинет окружность единичного радиуса **навсегда**. Таким образом, если у системы есть предельный цикл, то он не имеет точек внутри окружности единичного радиуса.