

ЛЕКЦИЯ #05
ДВУМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ: БИФУРКАЦИИ,
ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

ТЕСТ #2

§ 5.01 Бифуркации на фазовой плоскости

◆ Изменения в числе и типе неподвижных точек для двумерных автономных динамических систем могут быть разбиты на два класса.

К первому классу отнесем изменения **числа** неподвижных точек, которые есть и у одномерных динамических систем (L03) - тангенциальную бифуркацию, бифуркацию удвоения и бифуркацию смены устойчивости. Для всех этих случаев в точке бифуркации динамическая система имеет **кратную** неподвижную точку.

Во второй класс отнесем все те изменения, которые связаны с изменением **типа** изолированных неподвижных точек. Такие изменения специфичны для систем с размерностью фазового пространства $K \geq 2$.

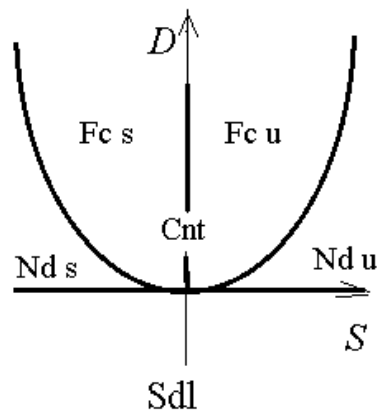


Рис. 05.1

Границы областей различных типов неподвижных точек двумерных автономных динамических систем на плоскости параметров $\{S, D\}$ (S - след, D - детерминант матрицы устойчивости).

На рисунке 05.1 на плоскости параметров $\{S, D\}$ показаны области, соответствующие неподвижным точкам разных типов. В первом квадранте расположены неустойчивые фокусы и узлы, в четвертом - устойчивые; в нижней полуплоскости расположены седла. Рисунок позволяет перечислить типичные бифуркации изолированных неподвижных точек:

- 1) изменение типа устойчивости фокуса (при котором в точке бифуркации неподвижная точка становится центром)
- 2) превращение фокуса в узел (или обратно) с сохранением типа устойчивости;
- 3) превращение узла в седло (или обратно).

Преобразование неустойчивого узла в устойчивый и превращение седла в фокус возможны только тогда, когда траектория эволюции системы на плоскости управляющих параметров проходит через начало координат. Такие переходы, при которых в точке бифуркации **оба** характеристических показателя обращаются в ноль, имеют меру ноль.

♦ **Пример 1.** Рассмотрим свойства неподвижных точек в автономной двумерной системе с уравнениями движения

$$\dot{x} = x - x^2 y, \quad \dot{y} = -y + \lambda x - x^2 \quad (01)$$

где $\lambda > 0$ - управляющий параметр. Скорость изменения динамических переменных обращается в ноль на кривых

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad y = \lambda x - x^2 \quad (02)$$

(гиперболе и параболе).

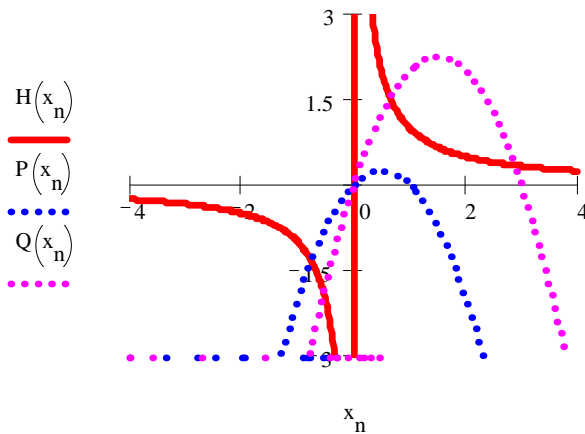


Рис. 05.2

Кривые (02) на фазовой плоскости. Парабола нарисована при значениях параметров $\lambda = 1$ и $\lambda = 3$.

Из рисунка непосредственно видно, что всегда есть одна неподвижная точка в третьем квадранте ($x < 0, y < 0$), а в первом квадранте ($x > 0, y > 0$) пара неподвижных точек появляется в результате тангенциальной бифуркации при некотором пороговом значении управляющего параметра $1 < \Lambda < 3$. Найдем значение Λ . Исключая y из уравнений (02), получаем

$$x^3 - \Lambda x^2 + 1 = 0. \quad (03)$$

Пусть X - значение абсциссы кратной неподвижной точки на пороге бифуркации. Для того, чтобы уравнение (21) имело двукратный корень, полином в левой части должен делиться на квадратный трехчлен $(x - X)^2$. Для этого должны выполняться равенства

$$\frac{2X - \Lambda}{1} = \frac{X^2}{2X} = \frac{1}{X^2} \quad (04)$$

из которых находятся значения X и Λ :

$$X = 2^{1/3} = 1.25992, \quad \Lambda = 3 \cdot 2^{-2/3} = 1.88988. \quad (05)$$

Таким образом, при $0 < \lambda < \Lambda$ у системы одна, а при $\lambda > \Lambda$ - три (нетривиальных - см. задачу **05.1**) неподвижных точек. Мы будем нумеровать их в порядке возрастания абсцисс как $o_{1,2,3}$. С ростом $\lambda > \Lambda$ точка o_2 сдвигается влево (при очень больших λ $x_2 \approx \lambda^{-1/2}$), а точка o_3 сдвигается вправо (при очень больших λ $x_3 \approx \lambda$).

♦ **Задача 05.1** Кроме исследованных в решении примера 1, система

$$\dot{x} = x - x^2 y, \quad \dot{y} = -y + \lambda x - x^2$$

обладает еще одной тривиальной неподвижной точкой, совпадающей с началом координат. Исследовать ее свойства (тип и устойчивость).

Обратимся теперь к определению типов этих неподвижных точек. Матрица устойчивости системы (01) есть

$$M = \begin{vmatrix} 1 - 2xy & -x^2 \\ \lambda - 2x & -1 \end{vmatrix}. \quad (06)$$

Ее след S и детерминант D равны

$$S = -2xy, \quad D = -1 + 2xy + \lambda x^2 - 2x^3. \quad (07)$$

В квадрантах, где лежат неподвижные точки, знак S всегда отрицателен. Поэтому бифуркации смены типа могут происходить или на линии, где $D = 0$, или на линии, где $D = S^2/4$.

Рассмотрим первое условие. Поскольку для неподвижных точек выполняется условие $xy = 1$ (см. первое из уравнений (02)), то детерминант D в неподвижных точках обратится в нуль, если абсцисса неподвижной точки будет удовлетворять уравнению

$$2x^3 - \lambda x^2 - 1 = 0. \quad (08)$$

Одновременно для абсциссы неподвижной точки должно выполняться уравнение

$$x^3 - \lambda x^2 + 1 = 0 \quad (09)$$

(ср. (21)). Вычитая одно уравнение из другого, находим значение абсциссы неподвижной точки, при котором $D = 0$: $x_0 = X = 2^{1/3}$. Таким образом, в нашей модели на пороге тангенциальной бифуркации определитель матрицы устойчивости обращается в нуль.

♦ **Задача 05.2** Доказать, что для **любой** двумерной автономной системы на пороге тангенциальной бифуркации определитель матрицы устойчивости обращается в нуль.

При $\lambda > \Lambda$ определитель в точке o_3 отрицателен, и эта точка является **седлом**.

Определитель в точке o_2 положителен - и эта точка является устойчивым узлом, если $S^2/4 - D > 0$, и устойчивым фокусом, если $S^2/4 - D < 0$. Найдем точку этой бифуркации. Из условия $D = S^2/4$ с учетом равенства $xy = 1$ получаем уравнение $\lambda x^2 - 2x^3 = 0$, откуда $x = \lambda/2$. Подставляя это значение в (09), находим пороговое значение $\Lambda' = 2 > \Lambda$. Таким образом, точка o_2 является **устойчивым узлом** при $1.89 < \lambda < 2$ и **устойчивым фокусом** при $\lambda > 2$.

Наконец, в точке o_1 определитель $D > 1 = S^2/4$; поэтому эта точка при любых значениях $\lambda > 0$ является **устойчивым фокусом**.

Таким образом, при значениях $\lambda > \Lambda$ система обладает двумя аттракторами и является бистабильной

♦ **Задача 05.3** Определить границы бассейнов аттракторов o_1 и o_2 модели из примера 1.

Следующим этапом исследований должно быть построение ветвей сепаратрисы седловой точки. По сказанному выше, их положение вблизи седла совпадает с направлением собствен-

ных векторов матрицы устойчивости. При $\lambda = 3$ эти направления даются формулами для отклонений: $\eta = -0.285\xi$ для неустойчивой и $\eta = 0.577\xi$ для устойчивой ветвей (см. следующий рисунок).

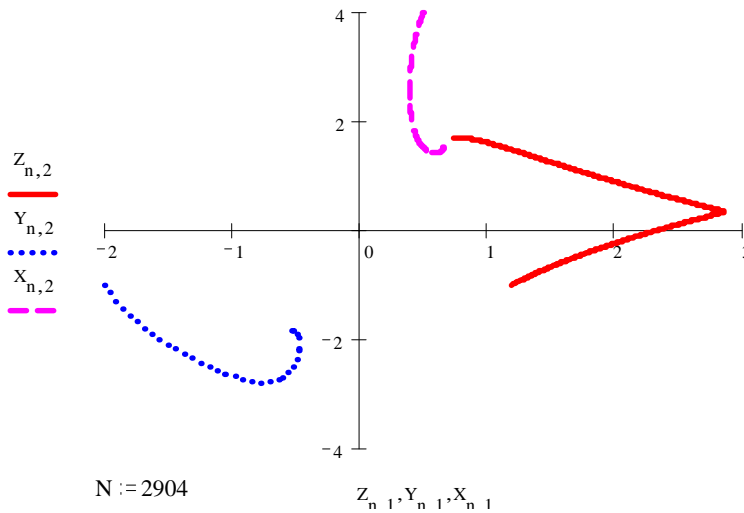


Рис. 05.3

К построению фазового портрета системы (01). Показаны три фазовые траектории для значения $\lambda = 3$: притягивающаяся к точке O_1 (пунктирная линия), притягивающаяся к точке O_2 (штриховая линия) и траектория, проходящая вблизи двух ветвей сепаратрисы седла O_3 (сплошная линия).

◆◆ Для двумерной автономной системы определение положений неподвижных точек, установление их типов (центр, устойчивый/неустойчивый фокус, устойчивый/неустойчивый узел или седло) и определение положений ветвей сепаратрис в большинстве случаев достаточно для построения глобального фазового портрета системы.

Перейдем к рассмотрению **периодических** движений в двумерных автономных системах.

Фазовые траектории периодических движений представляют собой замкнутые кривые на фазовой плоскости. Такие кривые могут образовывать семейства, сплошь заполняющие некоторую часть фазовой плоскости - или быть изолированными. Начнем с первого случая, который свойствен интегрируемым двумерным системам.

§ 5.02 Консервативные интегрируемые (гамильтоновы) системы

◆ Если для двумерной динамической системы

$$\dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y) \quad (10)$$

существует функция динамических переменных $E(x, y)$, сохраняющая при движении свое значение:

$$\dot{E}(x, y) = 0, \quad (11)$$

то эта функция называется **интегралом движения**, а система (10) - **интегрируемой** системой. Фазовые траектории интегрируемой системы представляют собой линии уровня интеграла движения. В общем случае такие линии либо замкнуты, либо уходят на бесконечность. Таким образом, типичное финитное движение интегрируемой системы является периодическим. Основной задачей теории является определение частоты колебаний от величины интеграла движения $\Omega = \Omega(E)$.

◆ К интегрируемым системам с двумерным фазовым пространством относятся гамильтоновы автономные системы с одной степенью свободы, для которых уравнения движения имеют вид

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (12)$$

Значение функции Гамильтона $H(p, q) = E$ называется **энергией**; энергия является интегралом движения:

$$\dot{E} = \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} = 0 \quad (13)$$

◆ Для любых автономных гамильтоновых систем с одной степенью свободы матрица устойчивости (см. §4.03) имеет вид

$$\hat{M}(p, q) = \begin{vmatrix} -H_{pq} & -H_{pp} \\ H_{qq} & H_{qp} \end{vmatrix} \quad (14)$$

След S этой матрицы равен нулю, как и сумма характеристических показателей: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Поэтому для автономных гамильтоновых систем в фазовом пространстве возможны неподвижные точки **только двух** типов - центры ($\text{Re} \lambda_i = 0, \lambda_1 = \lambda_2^*$) или седла ($\text{Im} \lambda_i = 0$) с равными по модулю характеристическими показателями.

◆ Закон сохранения энергии (13) часто позволяет понизить порядок гамильтоновой динамической системы, описав ее с помощью уравнения первого порядка. Так, функция Гамильтона $H(p, q)$, описывающая одномерное движение частицы массы m в потенциальном поле $U(q)$ [ЛЛ1, §11], имеет вид

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + U(q) \quad (15)$$

Разрешив уравнение $H(p, q) = E$ относительно p и используя второе из канонических уравнений (10), получаем пару уравнений первого порядка

$$\dot{q} = \pm \sqrt{2m(E - U(q))}. \quad (16)$$

Точки, в которых правые части этих уравнений движения (16) обращаются в нуль, называются **точками остановки**. Если в точке остановки $dU/dq \neq 0$, то она называется **точкой поворота**.

♦ **Задача 05.4** Найти закон движения вблизи точки остановки q_s , если она не является точкой поворота.

✧ Форма гамильтониана (15) является весьма распространенной, но все же не универсальной. Могут встретиться гамильтонианы, в котором кинетическая энергия $T(p)$ выражается сложной функцией, так что импульс не удастся явно выразить через координату подобно (16). Интегрируемость системы и возможность проинтегрировать уравнения ее движения в квадратурах - не синонимы.

Если область движения ограничена точками поворота $q_L < q_R$, то движение системы периодически, а его период $T(E)$ дается выражением

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{q_L}^{q_R} \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}} \quad (17)$$

Частота движения,

$$\Omega(E) = \frac{2\pi}{T(E)}, \quad (18)$$

как правило зависит от энергии. Важнейшее исключение представляет **гармонический осциллятор** - система с гамильтонианом

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2} q^2 \quad (19)$$

Для него при любых начальных условиях частота движения постоянна и равна Ω ; это свойство движения называется **изохронностью**.

♦ **Задача 05.4** Доказать, что для одномерного движения частицы в потенциальном поле

$$U(x) = U_0 \left(\frac{a-x}{x-a} \right)^2$$

период движения не зависит от энергии - существует изохронность.

§ 5.03 Стандартные модели

♦ Важнейшей стандартной моделью нелинейной консервативной интегрируемой системы является маятник. **Маятником (pendulum)** называется гамильтонова система с одной степенью свободы с (безразмерными) каноническими переменными - импульсом p и координатой φ и гамильтонианом

$$\parallel \parallel \quad H = \frac{p^2}{2} - \cos \varphi \quad (20)$$

♦ Координата φ рассматривается как угловая: состояния системы, различающиеся по φ на 2π считаются совпадающими. Фазовое пространство системы представляет собой цилиндр $(-\infty < p < \infty) \times (-\pi \leq \varphi < \pi)$.

Уравнения движения маятника имеют вид

$$\dot{p} = -\sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = p \quad (21)$$

Система имеет две неподвижные точки - центр $\varphi = 0, p = 0$, соответствующий энергии $E = -1$, и седло $\varphi = \pm\pi, p = 0$, соответствующее энергии $E = 1$. Сепаратриса седла представляет собой линию уровня гамильтониана, соответствующую энергии $E = 1$. Уравнение сепаратрисы имеет вид

$$p_s(\theta) = \pm \cos \frac{\theta}{2} \quad (22)$$

Почти при всех начальных условиях движение маятника периодично. При $E < 1$ движение маятника ограничено точками поворота, и называется **качанием** (*libration*). При $E > 1$ состояния маятника периодически повторяются, но скорость изменения координаты имеет постоянный знак. Такое движение маятника называется **вращением** (*rotation*).

♦ Маятник важен тем, что дает простейший пример системы, обладающей неподвижными точками обоих возможных типов - одним центром и одним седлом - и удобен для исследования движений в окрестности сепаратрисы седла. Во-вторых, модель маятника имеет простые и наглядные физические прототипы (см. [ЛЛ1, §5]). В третьих, модель маятника является универсальным инструментом для описания консервативного нелинейного резонанса в задачах о движении консервативных систем под действием гармонической внешней силы.

♦ Вторым важнейшим набором стандартных моделей нелинейных консервативных интегрируемых систем являются осцилляторы Дуффинга. **Осцилляторами Дуффинга** мы будем называть модели с уравнениями движения любого из следующих видов:

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0, \quad (23)$$

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0, \quad (24)$$

$$\ddot{x} - x + x^3 = 0, \quad (25)$$

и обозначать их как D_{1+} , D_{1-} и D_2 соответственно.

♦ В своем мемуаре [D18] Дуффинг рассматривал свойства неавтономной системы с уравнением движения

$$\ddot{x} + \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 = k \sin \omega t$$

где параметры β и γ малы в сравнении с α . При этом основное внимание было уделено "симметричному случаю" $\beta = 0, \gamma \neq 0$. В настоящее время термины "уравнение Дуффинга" и "осциллятор Дуффинга" утратили четкие границы: чаще всего их применяют к уравнениям (23-25) и их диссипативным обобщениям (с добавлением в левую часть члена " $2\Gamma\dot{x}$ ", описывающего затухание) без предположений о малости параметров при нелинейных членах.

D18 Duffing G. Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Sammlung Vieweg., Braunschweig, 1918. - VI+134 S.

♦ Модели осцилляторов Дуффинга и их обобщения, возникающие при замене консервативной системы на систему с малым затуханием, используются в теории колебаний как примеры типичных нелинейных осцилляторов. Две из этих моделей имеют универсальное значение как модели умеренной нелинейности, в которых в разложении потенциальной энергии вблизи минимума сохраняются не только квадратичные члены (что соответствует линейаризации уравнений движения), но и следующие за ними кватичные. В частности, моделью D_1 может быть описано движение маятника при умеренной амплитуде колебаний

♦ Для маятника и осцилляторов Дуффинга зависимость частоты движения от энергии $\Omega(E)$ может быть выражена через специальные функции (полные эллиптические интегралы). Польза от этого представления невелика: зависимость $\Omega(E)$ может быть найдена непосредственным численным интегрированием формулы (17) быстрее, чем поиском значений эллиптических интегралов в таблицах.

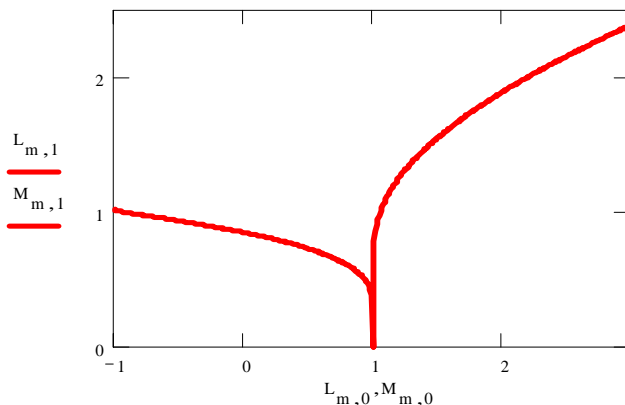


Рис. 05.4

Зависимость частоты движения маятника Ω от энергии E .

Большее значение имеет определение приближенных зависимостей $\Omega(E)$ в асимптотических областях - при значениях E вблизи минимумов потенциала ($E \approx -1$ для маятника; случай малых колебаний) и вблизи седлового (сепаратрисного) значения ($E \approx +1$ для маятника). Методы отыскания этих зависимостей могут быть использованы и для других моделей.

♦ Отметим, что решения уравнений движения стандартных моделей при любых начальных условиях могут быть в точности выражены через специальные функции - эллиптические функции Якоби - как для маятника [ЗС88, с.18], так и для осцилляторов Дуффинга [Д97, с.80].

ЗС88 - Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности ... М., Наука, 1988. - 368 с.

Д97 - Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. - 496 с.

К закону движения применимо сказанное выше о зависимости $\Omega(E)$: в большинстве случаев численное интегрирование уравнений движения позволяет быстрее определить характеристики движения, чем исследование точных формул для $x(t)$.