

# ЛЕКЦИЯ #04

## ОДНОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ - БИФУРКАЦИИ И ГИСТЕРЕЗИС

### ДВУМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

#### § 4.01 Бифуркации

◆ Единственными особыми решениями для одномерных систем являются неподвижные точки. Поэтому бифуркации в таких системах связаны с появлением и исчезновением неподвижных точек. Эти точки описываются действительными корнями уравнения  $F(x) = 0$ , где  $F(x)$  - функция в правой части уравнения движения

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = F(x)}. \quad (1)$$

Без ограничения общности эту функцию можно считать полиномом (некоторой степени  $N$ ) с действительными коэффициентами, которые являются функциями от параметров. По основной теореме алгебры полином степени  $N$  имеет  $N$  корней, причем комплексные корни образуют пары комплексно сопряженных чисел. Таким образом, в точке бифуркации число действительных корней уравнения  $F(x) = 0$  может измениться на четное число - неподвижные точки рождаются и исчезают **парами**.  $F(x, \lambda)$

Для рассмотрения закономерностей бифуркации достаточно аппроксимировать функцию  $F(x)$  **локально** в окрестности точки рождения корней. Эту аппроксимацию можно осуществить полиномами невысоких степеней.

Рассмотрим эволюцию неподвижных точек динамической системы (1) с зависящей от параметра с правой частью  $F(x, \lambda)$  при изменении параметра  $\lambda$ .

◆ Рассмотрим модель

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda + x^2 \quad (2)$$

При  $\lambda < 0$  уравнение (2) не имеет вещественных корней, а при  $\lambda > 0$  имеет два действительных корня

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}, \quad (3)$$

соответствующие двум неподвижным точкам. Непосредственной проверкой легко убедиться, что одна из этих неподвижных точек устойчива, а другая неустойчива.

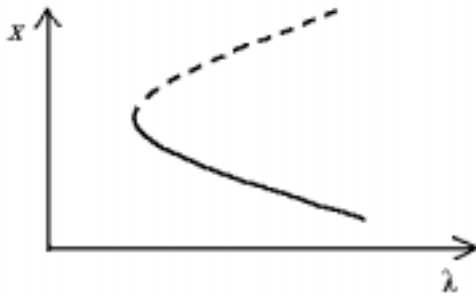


Рис. 04.1

Эволюция неподвижных точек при изменении управляющего параметра на плоскости "переменная - параметр" при **тангенциальной бифуркации**. Сплошная линия изображает траекторию устойчивой точки, а штриховая - неустойчивой.

Появление при данном значении управляющего параметра пары неподвижных точек (разной устойчивости) называется **тангенциальной бифуркацией** (*saddle-node bifurcation*).

✧ Исчезновение пары точек часто называют **обратной тангенциальной бифуркацией**.

◆ Тангенциальная бифуркация соответствует случаю, когда на пороге бифуркации уравнение  $F(x) = 0$  имеет двукратный корень. Достаточно часто встречается случай, когда уравнение  $F(x) = 0$  на пороге бифуркации имеет трехкратный корень. Такая бифуркация может быть описана моделью

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - x^3 \quad (4)$$

При любых  $\lambda$  у системы (4) есть неподвижная точка  $x_1 = 0$ :  $F'(0) = \lambda$ , поэтому  $x_1$  устойчива при  $\lambda < 0$  и неустойчива при  $\lambda > 0$ . Кроме того, при  $\lambda > 0$  у системы появляются еще две неподвижные точки

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{\lambda} \quad (5)$$

$F'(x_{2,3}) = -2\lambda$ , поэтому обе они устойчивы.

Таким образом, в точке бифуркации происходит рождение пары точек одинаковой устойчивости, совпадающих в момент рождения с третьей неподвижной точкой, меняющей при бифуркации свою устойчивость. Такая бифуркация называется **бифуркацией удвоения** (*pitchfork bifurcation*).

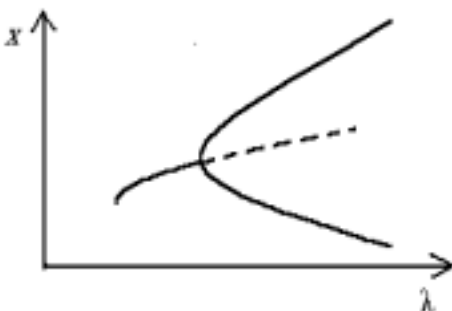


Рис. 04.2

Эволюция неподвижных точек при изменении управляющего параметра на плоскости "переменная - параметр" при **бифуркации удвоения**. Сплошная линия изображает траекторию устойчивой точки, а штриховая - неустойчивой.

◆ Рассмотрим эволюцию неподвижных точек модели с уравнением движения

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - x^2 \quad (6)$$

У этой системы при любых значениях  $\lambda$  есть две неподвижные точки,  $x_1 = 0$  и  $x_2 = \lambda$ . Значения производной правой части уравнения движения (6) в этих точках равны

$$F'(x_1) = \lambda, \quad F'(x_2) = -\lambda. \quad (7)$$

При изменении параметра  $\lambda$  число неподвижных точек остается неизменным, однако в точке  $\lambda = 0$  уравнение обладает двукратным корнем, а при переходе через точку  $\lambda = 0$  меняется тип устойчивости точек. Такое поведение также относится к числу бифуркаций и называется **бифуркацией смены устойчивости**.

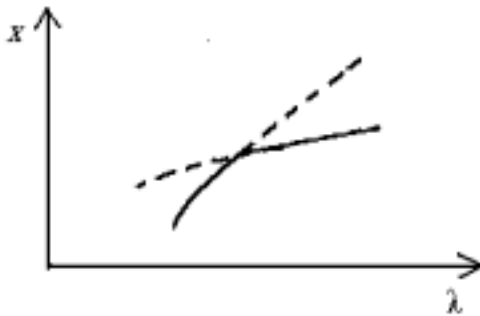


Рис. 04.3

Эволюция неподвижных точек при изменении управляющего параметра на плоскости "переменная - параметр" при бифуркации смены устойчивости. Сплошная линия изображает траекторию устойчивой точки, а штриховая - неустойчивой.

Практически все встречающиеся бифуркации в одномерных системах принадлежат к одному из указанных трех типов.

◆ Динамическая модель, имеющая более одной устойчивой неподвижной точки, называется *мультистабильной*. Для часто встречающегося случая, когда таких точек две, используется термин *бистабильность*.

✧ Бесконечно удаленная точка, даже если она устойчива, при таком подсчете не учитывается.

Из приведенных примеров следует, что бифуркация удвоения устойчивой неподвижной точки всегда приводит к бистабильности.

◆◆ Перечисленные выше типы бифуркаций - тангенциальная, удвоения и смены устойчивости - применимы к описанию характерных особенностей рождения и исчезновения неподвижных точек не только в одномерных системах - но в системах с **любой** размерностью фазового пространства.

### § 4.02 Гистерезис в одномерных мультистабильных системах

◆ Рассмотрим модель с уравнением движения

$$\dot{x} = \mu + x - x^3, \quad (8)$$

где  $\mu$  - управляющий параметр. Эта модель имеет два бифуркационных значения параметра  $\mu$ ,

$$\mu_{\pm} = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (9)$$

При  $\mu < \mu_-$  и  $\mu > \mu_+$  система (9) имеет единственную устойчивую неподвижную точку. При значениях  $\mu = \mu_{\pm}$  происходят тангенциальные бифуркации, и в области  $\mu_- < \mu < \mu_+$  система бистабильна - имеет две неустойчивых и одну устойчивую неподвижные точки. На плоскости "переменная - параметр" устойчивые неподвижные точки образуют две ветви,  $x_-(\mu)$  и  $x_+(\mu)$ , области определения которых перекрываются в области бистабильности системы.

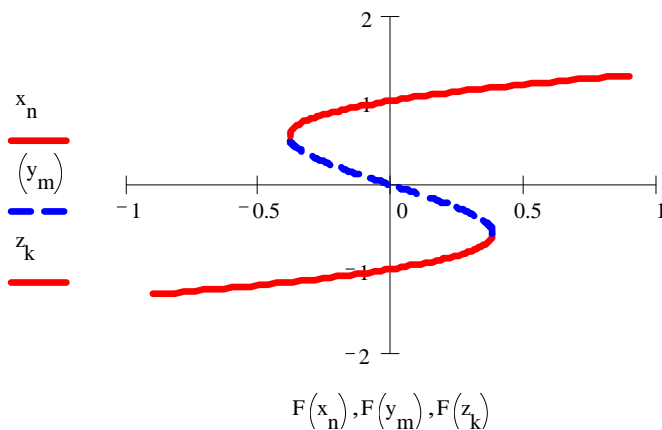


Рис. 04.4

Положение неподвижных точек системы (8) на плоскости "параметр  $\mu$  - переменная  $x$ ". Сплошные линии соответствуют устойчивым точкам, штриховая - неустойчивой точке.

◆ Рассмотрим теперь неавтономное обобщение модели (8) с уравнением движения

$$\dot{x} = \mu(t) + x - x^3, \quad (10)$$

Пусть параметр  $\mu(t)$  медленно изменяется ( $|\dot{\mu}| \ll 1$ ), проходя через область бистабильности. Для определенности примем, что  $\mu(0) < \mu_-$ ,  $\dot{\mu} > 0$ , а начальное условие  $x(0)$  совпадает с неподвижной точкой системы (8) при значении  $\mu(0)$ .

При медленном изменении параметра  $\mu(t)$  точка  $x(t)$  будет адиабатически следовать за положением неподвижной точки системы (8) при соответствующем значении  $\mu$ ,  $x(t) = x_-[\mu(t)]$ , до тех пор, пока значение  $\mu$  не достигнет бифуркационного значения  $\mu_+$ . При  $\mu(t) > \mu_+$  фазовая точка быстро перейдет в окрестность

стность единственной существующей в этой области ветви  $x_+(\mu)$  и в дальнейшем будет двигаться по ней:  $x(t) = x_+[\mu(t)]$ .

Если обратить направление изменения времени, то точка  $x(t)$  будет адиабатически следовать за положением неподвижной точки системы (8) при соответствующем значении  $\mu$ ,  $x(t) = x_+[\mu(t)]$ , до тех пор, пока значение  $\mu$  не достигнет бифуркационного значения  $\mu_-$ . При  $\mu(t) < \mu_-$  фазовая точка быстро перейдет в окрестность единственной существующей в этой области ветви  $x_-(\mu)$  и в дальнейшем будет двигаться по ней:  $x(t) = x_-[\mu(t)]$ .

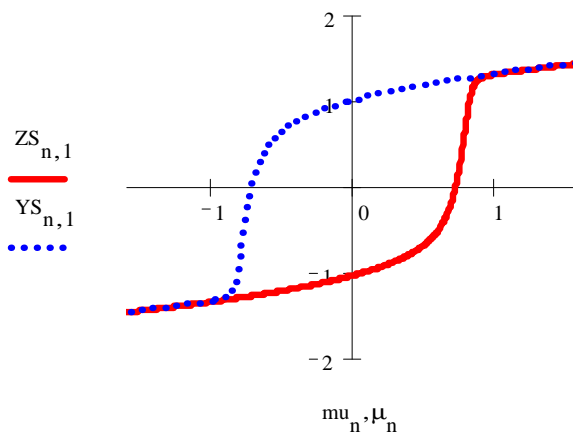


Рис. 04.5

Положение фазовой точки системы (8) на плоскости на плоскости "параметр  $\mu(t)$  - переменная  $x(t)$ " для законов изменения параметра  $\mu(t) = -1.6 + 0.1t$  (сплошная линия) и  $\mu(t) = 1.6 - 0.1t$  (пунктирная линия).

Таким образом, при медленном переходе управляющего параметра через область бистабильности в противоположных направлениях законы движения  $x(t)$  в области бистабильности будут (могут) существенно различаться. Это явление, типичное для мультистабильных систем, в теории колебаний называется **гистерезисом**.

✧ Термин "гистерезис" (от греческого ηιστερесиς - запаздывание) введен Дж.А. Эвингом (J.A. Ewing, 1890) для обозначения открытого им явления запаздывания изменений намагниченности вещества по отношению к изменениям напряженности внешнего магнитного поля. Главное сходство не в этом (изменения параметров могут быть произвольно медленными), а в аналогии между графиком на рис. 02.5 и петлей гистерезиса - неоднозначной зависимостью магнитной индукции  $B(H)$  в ферромагнетиках. В теорию колебаний термин "гистерезис" был введен Ван дер Полем (B. Van der Pol, 1922).

## ДВУМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Теория двумерных систем составляет ядро теории колебаний. так как только в двумерных автономных системах возможны колебания в обычном смысле слова - движения, характеризующиеся определенной повторяемостью состояний системы и описываемые первыми четырьмя из кинематических моделей, перечисленных в лекции L01.

### § 4.03 Неподвижные точки двумерных систем

◆ Рассмотрим двумерную автономную динамическую систему с уравнениями движения

$$\dot{x} = F(x, y); \quad \dot{y} = G(x, y) \quad (11)$$

Фазовое пространство системы (11) обычно представляет собой фазовую плоскость  $\{x, y\}$ . Изображение на этой плоскости исключительных фазовых траекторий системы (неподвижных точек, сепаратрис седел и предельных циклов) вместе с несколькими типичными траекториями общего вида составляет **фазовый портрет** динамической системы, который дает наглядное качественное представление о характере движений при различных начальных условиях.

◇ Уточним: фазовое пространство системы (11) может иметь топологию цилиндра  $R_1 \times S_1$  (пример - маятник) или тора  $S_1 \times S_1$ . В таких случаях на фазовой плоскости могут быть показаны развертки этих поверхностей.

В общем случае определение структуры фазовой плоскости, а в особенности отыскание аттракторов с периодическим движением - предельных циклов - представляет весьма сложную задачу.

◆ "...Вопрос о максимальном числе и о расположении предельных циклов Пуанкаре для дифференциального уравнения первого порядка и первой степени вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$$

где  $X, Y$  - целые рациональные функции  $n$ -й степени относительно  $x, y$ " составляет 16-ю проблему Гильберта [ПГ69, с.47], поставлен около 100 лет назад и до сих пор в общем виде не решен.

ПГ69 Проблемы Гильберта. Сборник под ред. П.С. Александрова. М., Наука, 1969. - 240 с.

Методы исследования систем на фазовой плоскости собраны в справочнике [БЛ90]. Исследование неподвижных точек представляет самую простую часть задачи.

БЛ90 Баутин Н.А., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. 2-е изд. М., Наука, 1990. - 488 с.

◆ Обратимся к рассмотрению неподвижных точек  $\vec{x}_o$  системы (11). Они определяются корнями системы уравнений

$$F(x_o, y_o) = 0; \quad G(x_o, y_o) = 0 \quad (12)$$

и в типичных случаях являются изолированными.

Аппарат для исследования устойчивости неподвижных точек сформулируем в общем виде. Пусть система уравнений движения динамической системы в  $K$ -мерном фазовом пространстве имеет вид

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}). \quad (13)$$

◆ **Матрицей устойчивости (stability matrix)**  $\hat{M}(\vec{x})$  динамической системы (13) в точке фазового пространства  $\vec{x}$  называется квадратная матрица  $K \times K$  с элементами

$$M_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad (14)$$

причем значения всех производных берутся в точке  $\vec{x}$ . Собственные значения матрицы устойчивости  $\hat{M}(\vec{x})$  называются **локальными характеристическими показателями**  $\lambda_n(\vec{x})$  динамической системы. Совокупность  $K$  таких показателей задает **спектр** матрицы устойчивости.

Если точка  $\vec{x}_o$  является неподвижной, то ее устойчивость в линейном приближении определяется спектром характеристических показателей. Рассмотрим движение системы вблизи неподвижной точки  $\vec{x}_o$ . Положим  $\vec{x} = \vec{x}_o + \vec{\xi}$ , подставим это выражение в уравнения движения (13), разложим  $\vec{F}(\vec{x})$  в ряд Тейлора по компонентам  $\vec{\xi}$  и пренебрежем всеми членами, кроме линейных по  $\xi_i$ . Уравнения движения для компонент отклонения  $\vec{\xi}$  будут иметь вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^K M_{ij} \xi_j. \quad (15)$$

В типичном случае невырожденного спектра матрицы устойчивости (все  $\lambda_i$  различны) общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$\xi_i(t) = \sum_{n=1}^K A_{in} e^{\lambda_n t} \quad (16)$$

Если среди локальных характеристических показателей данной неподвижной точки есть хотя бы **один с положительной** действительной частью, то при начальных условиях общего вида компоненты отклонения будут нарастать со временем, и неподвижная точка будет **неустойчива**.

◆ Перейдем теперь к рассмотрению двумерных систем. Линеаризованную систему уравнений для отклонений от неподвижной точки можно в этом случае записать в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta \quad (17)$$

где через  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  обозначены вещественные элементы матрицы устойчивости. Собственные значения матрицы устойчивости выражаются через эти коэффициенты так:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc} \quad (18)$$

Выражению (18) можно придать более простой вид, введя **след**  $S$  матрицы устойчивости - сумму диагональных матричных элементов

$$S = M_{11} + M_{22} = a + d \quad (19)$$

(след матрицы устойчивости равен значению локальной диссипации в неподвижной точке - см. L02):  $S = \Lambda(\vec{x}_0)$  и **определитель**  $D$  матрицы устойчивости

$$D = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = ad - bc. \quad (20)$$

Собственные значения матрицы устойчивости выражаются через эти величины так:

$$\lambda_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - D}. \quad (21)$$

Отсюда вытекает, что сумма характеристических показателей равна следу матрицы устойчивости:  $\lambda_1 + \lambda_2 = S$ , а их произведение - определителю:  $\lambda_1\lambda_2 = D$ .

#### § 4.04 Классификация неподвижных точек

◆ Неподвижные точки двумерных систем классифицируются по свойствам их локальных характеристических показателей.

Неподвижная точка, в которой показатели  $\lambda_i$  чисто мнимые, называется **центром** (*centre*). В окрестности центра фазовые траектории образуют семейство эллипсов.

Неподвижная точка, в которой показатели имеют отличные от нуля мнимые части и ненулевую действительную часть, называется **фокусом** (*focus*). Если  $S < 0$ , то фокус является устойчивым, а если  $S > 0$ , то неустойчивым. В окрестности фокуса фазовые траектории образуют семейство логарифмических спиралей.



Неподвижная точка, в которой показатели действительны и имеют разные знаки, называется **седлом** (*saddle*) или седловой точкой. В окрестности седла фазовые траектории образуют семейство гипербол.

Вблизи седла существуют фазовые траектории, по которым фазовая точка при  $t \rightarrow \infty$  или при  $t \rightarrow -\infty$  неограниченно приближается к седловой точке. Эти фазовые траектории называются **устойчивыми** и **неустойчивыми ветвями сепаратрисы** седла соответственно. Все такие ветви (иногда - с добавлением к ним самой неподвижной точки) объединяются под названием **сепаратрисы** (*separatrix*). Сепаратрисы седловых точек составляют третью группу исключительных фазовых траекторий вместе с неподвижными точками и изолированными замкнутыми фазовыми траекториями - предельными циклами (см. §2.04, п.3).

✧ Сепаратрисы играют важную роль в качественном исследовании структуры фазовой плоскости двумерных динамических систем. Свойство сепаратрис разделять фазовую плоскость на области, "соответствующие движениям различного характера", иногда принимается за их определение [ММ+88, с.21]. Да и сам термин "сепаратриса" восходит к латинскому *separare* - "разделять". Однако данное выше определение седла и его сепаратрис сохраняет смысл и в многомерных системах, при  $K \geq 3$ . Одномерные множества - сепаратрисы при этом не разделяют никаких  $K$ -мерных областей.

Неподвижная точка, в которой показатели действительны и имеют одинаковые знаки, называется **узлом** (*node*). Если  $S < 0$ , то узел является устойчивым, а если  $S > 0$ , то неустойчивым.

◆ На плоскости параметров  $\{S, D\}$  равенство нулю действительной части характеристических показателей неподвижной точки, как видно из выражения (12), возможно только на полупрямой  $S = 0, D \geq 0$ , которая имеет нулевую площадь.

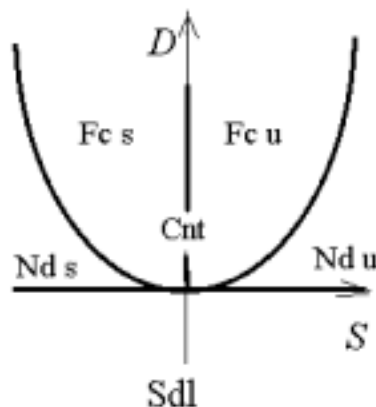


Рис. 04.6

Границы областей различных типов неподвижных точек двумерных автономных динамических систем на плоскости параметров  $\{S, D\}$  ( $S$  - след,  $D$  - детерминант матрицы устойчивости).

Таким образом, для систем общего вида точки типа центр встречаются исключительно редко. Необходимость их рассмотрения в теории колебаний связана с тем, что они являются типичными для консервативных систем, в которых **по**

**определению**  $S = 0$  (см. L02). Неподвижные точки двумерных консервативных систем суть либо центры, либо седла.

◆ Выбором масштаба времени для системы уравнений (17) можно обеспечить выполнение условия

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \quad (22)$$

Таким преобразованием пространство неподвижных точек отображается на поверхность четырехмерной сферы единичного радиуса. Меры областей этой поверхности, соответствующие различным классам точек, и определяют их распространенность в системах общего вида.

Точки типа центр являются исключительными (при малом изменении параметров общего вида системы превращаются в точки других классов) и имеют меру ноль. Фокусам соответствует область, заданная условием

$$(a - d)^2 + 4bc < 0. \quad (23)$$

Седлам соответствует область, заданная условием

$$(a - d)^2 + 4bc > 0, \quad ad - bc < 0. \quad (24)$$

Остальная часть поверхности гипersферы соответствует узлам.

Вычисление объемов областей (23) и (24) на поверхности гипersферы (22) можно провести численно. Найденные значения вероятностей фокусов ( $P_F$ ), седел ( $P_S$ ) и узлов ( $P_N$ ) таковы:

$$P_F = 0.29, \quad P_S = 0.50, \quad P_N = 0.21. \quad (25)$$

Таким образом, для систем общего вида наиболее вероятным типом неподвижной точки является седло, менее вероятен фокус, а узел является самым редким типом. Частоты устойчивых и неустойчивых точек среди фокусов и узлов равны по очевидной симметрии.