

ЛЕКЦИЯ #02

ДИНАМИКА КОЛЕБАНИЙ: МОДЕЛИ СИСТЕМ

§ 2.01 Динамические системы

◆ **Динамическая система (ДС)** - модель, которая описывается независимой переменной - **временем** t - и набором K величин - **динамических переменных** $\{x_i\}$, ($1 \leq i \leq K$), считающихся функциями времени: $x_i = x_i(t)$. Совокупность значений всех динамических переменных $\{x_i(t_0)\}$ в данный момент времени t_0 определяет **состояние** динамической системы. Совокупность $\{x_i(t_0)\}$ считается координатами точки в K -мерном пространстве состояний системы, которое называется **фазовым пространством**. Точка этого пространства, соответствующая состоянию системы, называется **фазовой точкой**.

✧ Для упрощения записи формул координаты фазовой точки можно считать компонентами вектора $\vec{x}(t)$. В использовании векторных обозначений нужна осторожность: x_i могут иметь **разные** размерности.

✧ Величины $\{x_i\}$ считаются действительными. Для описания некоторых динамических систем (например, возникающих в квантовой механике) вводятся комплексные динамические переменные. В этом случае при подсчете размерности фазового пространства K действительные и мнимые части переменных должны учитываться по отдельности.

◆ Описание динамической системы может потребовать указания значений ряда **параметров** динамической системы - физических величин $\{a_j\}$, ($1 \leq j \leq L$), отличных от динамических переменных.

✧ Совокупность параметров $\{a_j\}$ можно обозначать как вектор \vec{a} в L -мерном пространстве параметров.

◆ Динамическая система определена, если задан **оператор эволюции** $\hat{S}(t, t_0)$, который известному состоянию системы в момент t_0 сопоставляет единственное состояние системы в любой допустимый последующий момент времени $t > t_0$: $\vec{x}(t) = \hat{S}(t, t_0)\vec{x}(t_0)$. Зависимость $\vec{x}(t)$ называется **законом движения** системы, или просто **движением** (см. L01.1). Совокупность точек $\{\vec{x}(t) | \forall t (> t_0)\}$ образует **фазовую траекторию** движения. Обычно оператор $\hat{S}(t, t_0)$ не дан непосредственно, а определяется **уравнениями движения**.

§ 2.02 Уравнения движения

◆ Для теории колебаний наиболее важен класс моделей, в которых время t изменяется непрерывно, а уравнения движения образуют систему K обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\boxed{\frac{dx_i}{dt} = F_i(\{x_i\}, \{a_j\}), \quad (1 \leq i \leq K)} \quad (1)$$

где $\{a_j\}, (1 \leq j \leq L)$ - параметры. В векторных обозначениях: $\dot{\mathbf{x}} = \vec{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$.

♦ **Пример 1.** Система уравнений, определяющих движение материальной точки массы m под действием силы $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$, зависящей от ее координат \vec{r} и скорости $\dot{\vec{r}}$ в данной инерциальной системе отсчета, включает определение импульса частицы,

$$m\dot{\vec{r}} = \vec{p}, \quad (2)$$

и второй закон Ньютона,

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}). \quad (3)$$

В совокупности они образуют систему шести уравнений вида (1). Решение такой системы возможно только при специальном выборе функций $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$.

♦ **Пример 2.** Канонические уравнения механики гамильтоновых систем,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (4)$$

где $H(\vec{p}, \vec{q}, t)$ - функция Гамильтона [ЛЛ1, § 40] образуют систему вида (1).

♦ **Пример 3.** Колебательный контур - модель, описывающая электрическую цепь, состоящую из конденсатора емкостью C , пластины которого соединены линейным проводником с сопротивлением R и индуктивностью L . Состояние системы задается величиной заряда конденсатора q и величиной тока I в проводнике. Эти величины связаны локальным законом сохранения заряда,

$$\dot{q} = I, \quad (5)$$

и уравнением для скорости изменения тока, вытекающим из закона электромагнитной индукции и закона Ома для участка цепи, содержащего ЭДС,

$$\dot{I} = -\frac{1}{LC}q - \frac{R}{L}I. \quad (6)$$

В совокупности они образуют систему двух уравнений вида (1).

♦ Следующий **пример 4** заимствуем из химической кинетики. Как правило, мы не будем заниматься выводом уравнений движения - но в данном случае, ради новизны предмета, сделаем исключение.

Основным уравнением химической кинетики является **закон действующих масс** (mass action law): скорость химической реакции, в ходе которой из k молекул вещества x , l молекул вещества y и т.д. образуется одна молекула вещества z при постоянных прочих условиях пропорциональна произведению концентраций (X, Y, \dots) исходных молекул, взятых в степенях, равных числу молекул данного сорта, участвующих в реакции:

$$\boxed{\dot{Z} \propto X^k Y^l \dots} \quad (7)$$

✧ Закон действующих масс (ЗДМ) был установлен норвежскими химиками К.М. Гульдбергом и П. Вааге (С.М. Guldberg, P. Waage) в 1864 - 1879 гг. ЗДМ применим, как правило, для описания **элементарных стадий** химических реакций. Выявление таких стадий составляет одну из важнейших задач химической кинетики, часто далеко не простую. Так, по современным представлениям механизм реакции окисления водорода, описываемой химическим уравнением $2\text{H}_2 + \text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O}$, насчитывает 30 (тридцать) стадий [ХБК83, с.7], а одностадийные реакции представляют собой редкие исключения [ХБК83, с.11]. Далее, ЗДМ применим к реакциям, идущим в объеме разбавленных растворов или газовых смесей невысокой плотности.

ХБК83 - Химическая и биологическая кинетика. Под ред. Н.М. Эмануэля, И.В. Березина, С.Д. Варфоломеева. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983 г. - 296 с.

Простейшей является протекающая при постоянном объеме системы веществ мономолекулярная химическая реакция, в ходе которой молекула вещества x распадается на молекулы веществ y и z . На основании закона действующих масс она может быть описана уравнением

$$\frac{dX}{dt} = -aX, \quad (8)$$

где X - число молекул вещества x (при постоянном объеме пропорциональное концентрации), а a - параметр. Одновременно с ней может протекать и обратная бимолекулярная реакция, в ходе которой из молекул веществ y и z образуется молекула вещества x . С учетом обратной реакции уравнение для X принимает вид

$$\frac{dX}{dt} = -aX + bYZ. \quad (9)$$

где Y и Z - числа молекул веществ y и z , а b - параметр, характеризующий скорость обратной реакции. Поскольку число молекул веществ всех реагирующих веществ должно сохраняться,

$$X + Y + Z = S = \text{const}, \quad (10)$$

и поскольку в силу равноправия молекул веществ y и z

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dZ}{dt}, \quad (11)$$

для скорости изменения числа молекул Y получаем уравнение

$$\frac{dY}{dt} = \frac{a}{2}X - \frac{b}{2}YZ. \quad (12)$$

Исключая переменную Z с помощью уравнения (10), получаем простейшую модель химической кинетики, которую будем называть моделью χ_1 . Она задана системой вида (1) из двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -aX + bY(S - X - Y), \\ \dot{Y} &= \frac{a}{2}X - \frac{b}{2}Y(S - X - Y),\end{aligned}\tag{13}$$

и зависит от параметров a , b и S .

◆ Если исходные уравнения движения системы представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения порядка выше первого, то, приняв производные динамических переменных за новые динамические переменные, всегда можно свести систему к виду (1). В дальнейшем в необходимых случаях мы будем подразумевать использование этой процедуры.

◆ **Пример 5.** Система уравнений

$$\ddot{x} + xy = 0, \quad \ddot{y} + \dot{x}y = 0\tag{14}$$

эквивалентна системе

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -xy, \quad \dot{y} = q, \quad \dot{q} = -py,\tag{15}$$

которая имеет вид (1) и описывает динамическую систему с $K = 4$ (см. также примеры 1 и 2 в следующем параграфе).

Если K - размерность фазового пространства, то число $N = K/2$ в теории колебаний называется *числом степеней свободы*.

✧ Полуцелые значения N неуклюжи; к тому же они употребляются только в отечественной литературе. Мы будем предпочитать термин " K -мерные динамические системы", а число степеней свободы N будем привлекать, только когда оно целое.

◆ В теории колебаний, как и вообще в теоретической физике, исследование уравнений движения удобно проводить, ориентируясь на собственные масштабы системы. Если среди параметров модели имеются три величины с независимыми размерностями, то их удобно принять в качестве единиц измерения. При этом время, динамические переменные и все остальные параметры задачи станут безразмерными величинами.

✧ Следуя традициям теоретической физики, мы всюду подразумеваем использование системы единиц с тремя основными величинами - например, абсолютную гауссову систему СГС. При использовании других систем единиц необходимо ввести соответствующие изменения.

Одной из выгод такого преобразования является возможность введения расстояния R между точками \vec{x} и \vec{y} фазового пространства, которое обычно считается евклидовым,

$$R(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^K (x_i - y_i)^2},\tag{16}$$

и скорости V движения точки в фазовом пространстве,

$$V = \sqrt{\sum_{i=1}^K (\dot{x}_i)^2}. \quad (17)$$

Иллюстрируем переход к безразмерным переменным примерами.

♦ **Пример 6.** В задаче об одномерном движении частицы в поле с потенциалом

$$U(y) = U_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{y}{a} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{y}{a} \right)^4 \right] \quad (18)$$

под действием силы вязкого трения $f(\dot{y}) = -\alpha\dot{y}$ и внешней силы, зависящей от времени τ по гармоническому закону, уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{y} + \alpha\dot{y} + U_0 \left[\frac{y}{a^2} + \frac{y^3}{a^4} \right] = \Phi \cos \Omega \tau, \quad (19)$$

где m - масса частицы, α - постоянная вязкого трения, U_0 и a - характерные величина и длина потенциала, Φ и Ω - амплитуда и частота внешней силы. Выбрав в качестве единиц массы, длины и времени соответственно массу частицы m , характерную длину потенциала a и величину

$$\theta = \sqrt{\frac{ma^2}{U_0}} \quad (20)$$

перепишем уравнение (19) в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + x^3 = F \cos \omega t \quad (21)$$

Входящие в это уравнение величины

$$x = \frac{y}{a}, \quad t = \frac{\tau}{\theta}, \quad 2\gamma = \alpha \frac{\theta}{m}, \quad F = \Phi \frac{a\theta^2}{m}, \quad \omega = \Omega\theta \quad (22)$$

безразмерны. Уравнение (21), зависящее от **трех** безразмерных параметров, относится к числу уравнений Дуффинга и будет подробно исследоваться в последующих лекциях.

♦ **Пример 7.** Простейшая модель химической кинетики χ_1 (13) содержит три параметра - a , b и S , размерности которых зависимы: $[b] = [S^{-1}a]$. Выбрав в качестве единиц времени и концентрации величины $2/a$ и S соответственно, перепишем систему (13) в виде

$$\dot{x} = -2x + 2\mu y(1 - x - y), \quad \dot{y} = x - \mu y(1 - x - y). \quad (23)$$

Входящие в это уравнение величины

$$x = \frac{X}{S}, \quad y = \frac{Y}{S}, \quad \mu = \frac{bS}{a} \quad (24)$$

безразмерны. Таким образом, простейшая модель химической кинетики характеризуется **одним** безразмерным параметром μ .

В дальнейшем мы всегда будем брать уравнения движения динамических систем в безразмерной форме. Ее использование сокращает число параметров

системы в общем случае на три. Ниже, говоря о числе параметров модели, мы всегда будем иметь в виду число параметров для безразмерной формы модели.

§ 2.03 Классификация динамических систем

◆ Если все параметры a_j не зависят от t , то ДС называется **автономной**. Если параметры a_j зависят от t заданным образом, $a_j \equiv a_j(t)$, то ДС называется **неавтономной**.

Каждой неавтономной ДС с K -мерным фазовым пространством может быть сопоставлена эквивалентная автономная ДС с $(K+1)$ -мерным фазовым пространством путем следующей процедуры, называемой **автономизацией**. К системе уравнений движения (1) добавляется уравнение

$$\frac{dx_{K+1}}{dt} = 1; \quad (25)$$

а время t в аргументах $a_j(t)$ заменяется на динамическую переменную x_{K+1} , численно равную времени.

Фазовое пространство системы, получившейся в результате автономизации, называется **расширенным фазовым пространством**. Таким образом, замена постоянных параметров системы на параметры, зависящие от времени, эффективно увеличивает число степеней свободы системы на $1/2$.

◆ Для динамической системы вида (1) **локальной диссипацией** $\Lambda(\vec{x})$ в данной точке \vec{x} фазового пространства называется дивергенция поля фазовых скоростей в этой точке, взятая с обратным знаком:

$$\Lambda(\vec{x}) = -\operatorname{div} \dot{\vec{x}} = -\sum_{i=1}^K \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^K \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \quad (26)$$

✧ **Пример 1.** Линейный осциллятор с вязким трением есть система с уравнением движения

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (27)$$

Эта модель может быть описана двумя уравнениями первого порядка (см §02)

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\alpha v - \omega_0^2 x. \quad (28)$$

Отсюда $\Lambda(\vec{x}) = \alpha$: диссипация линейного осциллятора с вязким трением положительна, постоянна и равна коэффициенту трения. ✧ Для осциллятора с трением диссипация пропорциональна скорости изменения энергии: см. [ЛЛ188, §25]. Для систем общего вида энергия не определена, и такой связи нет.

✧ **Пример 2.** Осциллятор Рэлея (модель, которую мы будем подробно исследовать в дальнейшем) есть система с уравнением движения

$$\ddot{x} - \alpha \dot{x}(1 - \dot{x}^2) + x = 0. \quad (29)$$

Эта модель может быть описана двумя уравнениями первого порядка (см. §02)

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = \alpha(v - v^3) - x. \quad (30)$$

Диссипация осциллятора Рэля $\Lambda(\vec{x}) = -\alpha(1 - 3v^2)$ зависит от величины скорости: она отрицательна при $|v| < 1/3$ и положительна при $|v| > 1/3$.

Если диссипация во всех точках фазового пространства постоянна и положительна,

$$\Lambda(\vec{x}) = \gamma > 0 \quad (31)$$

то она называется **затуханием**. В некоторых случаях для упрощения формул удобнее обозначение $\Lambda(\vec{x}) = 2\gamma > 0$; при этом γ тоже называют затуханием.

◆ **Теорема об эволюции фазового объема.** Для динамических систем вида (1) относительная скорость изменения величины элементарного фазового объема равна диссипации с обратным знаком.

Рассмотрим элементарный объем

$$V = \prod_{i=1}^K \Delta x_i \quad (32)$$

вблизи точки \vec{x} фазового пространства.

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^K \frac{1}{\Delta x_i} \frac{d}{dt}(\Delta x_i) = \sum_{i=1}^K \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = -\Lambda(\vec{x}), \quad (33)$$

что завершает доказательство.

◆ Системы, для которых диссипация равна нулю во всех точках фазового пространства, $\Lambda(\vec{x}) \equiv 0$, называются **консервативными**. Системы, для которых $\Lambda(\vec{x}) \neq 0$, называются **диссипативными**.

✧ Если $\Lambda(\vec{x}) \geq 0$ всюду в фазовом пространстве (см. выше пример 1), то фазовый объем при движении уменьшается.

§ 2.04 Основные задачи теории динамических систем

1. Задача Коши: по заданному начальному состоянию $\vec{x}(t_0)$ при заданных параметрах \vec{a} найти закон движения $\vec{x}(t)$ для $t > t_0$. Обычно принимают $t_0 = 0$, а начальное состояние $\vec{x}(t_0) = \vec{x}(0)$ называют **начальными условиями**.

✧ Задача Коши особо важна для систем, в которых произвольное - по усмотрению экспериментатора - задание начальных условий $\vec{x}(0)$ невозможно - например, в небесной механике.

2. Исследование устойчивости движения. Фундаментальной характеристикой данного движения $\vec{x}(t)$ является его **устойчивость**, определяющая качественный характер взаимного поведения движений с близкими начальными условиями. В частности, решение задачи Коши для данной динамической

системы практически ценно, только если известно, что малые вариации начальных условий мало изменяют закон движения или отдельные его характеристики. В теории колебаний основную роль играют следующие два определения устойчивости.

◆ Движение $\vec{x}(t)$ **устойчиво по Ляпунову**, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$ такое, что из $|\vec{x}(0) - \vec{x}'(0)| < \delta$ при $\forall t$ следует $|\vec{x}(t) - \vec{x}'(t)| < \varepsilon$. При устойчивом по Ляпунову движении фазовые точки, близкие в начальный момент времени, останутся близкими во все моменты.

◆ Движение $\vec{x}(t)$ **орбитально устойчиво**, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$ такое, что из $|\vec{x}(0) - \vec{x}'(0)| < \delta$ при $\forall t$ для некоторого t' следует $|\vec{x}(t') - \vec{x}'(t')| < \varepsilon$. При орбитально устойчивом движении фазовые точки, близкие в одном месте фазового пространства, останутся близкими и во всех других местах.

3. Исследование структуры фазового пространства. Для автономных систем с фиксированными значениями параметров определение структуры фазового пространства сводится, в первую очередь, к выделению особых (исключительных) фазовых траекторий.

◆ **3.1.** Состояние динамической системы в общем случае изменяется со временем. Поэтому исключительными фазовыми траекториями являются **неподвижные точки** (*fixed points*), представляющие **состояния равновесия** системы. Неподвижные точки \vec{x}_f определяются уравнениями $\vec{F}(\vec{x}_f, \vec{a}) = 0$.

◆ **3.2.** Движение динамической системы в общем случае неперiodично. Поэтому исключительными являются фазовые траектории, соответствующие **периодическому движению**. Для автономных динамических систем такие траектории являются замкнутыми кривыми в фазовом пространстве.

✧ Третьим типом исключительных фазовых траекторий являются **сепаратрисы** седловых точек. Их определение будет дано позже.

◆ **3.3.** Если при любых начальных условиях \vec{x}_0 из некоторой области при достаточно больших временах фазовая точка окажется сколь угодно близко к фазовой траектории A , то такая фазовая траектория называется **аттрактором** и является исключительной. Множество Ω всех начальных состояний $\{\vec{x}_0\}$, определяющих фазовые траектории, асимптотически притягивающиеся к данному аттрактору A , называется **бассейном** (этого) аттрактора.

◆ **3.4.** Если при движении системы значения динамических переменных остаются ограниченными - существуют такие положительные числа X_i , что $|x_i(t)| < X_i$ при всех t - то движение системы называется **финитным**. Если хотя бы для одной переменной это условие не выполняется, то движение системы называется **инфинитным**. Выделение границ областей финитного движения входит в задачу исследования структуры фазового пространства.

Для системы с K -мерным фазовым пространством и оператором эволюции $S(t)$ **ловушкой** (trap) называется K -мерная область фазового пространства \mathcal{F} такая, что если в начальный момент времени состояние системы лежит в \mathcal{F} , то и во все последующие моменты оно будет лежать в \mathcal{F} :

$$\vec{x}(0) \in \mathcal{F} \Rightarrow S(t)\vec{x}(0) \in \mathcal{F} \quad (34)$$

Построение ловушки конечных размеров достаточно для доказательства финитности движения системы.

4. Исследование динамической системы. При изменении параметров \vec{a} динамической системы в общем случае изменяются и свойства ее исключительных решений. Особый интерес представляет определение граничных значений параметров, при переходе через которые меняется **число** и/или **тип** таких решений. Такое изменение называется **бифуркацией**, а соответствующие значения \vec{a}_b - **точками бифуркации**.

✧ Исследование свойств динамической системы, обладающей несколькими параметрами, представляет весьма трудоемкую задачу. Обычно при таком исследовании исследуют зависимость только от **одного управляющего параметра** (control parameter) a_i , придавая остальным компонентам вектора $\{a_j\}$ постоянные значения.

✧ Изображение свойств динамической системы на плоскости **двух** управляющих параметров (a_1, a_2) в настоящее время часто выступает как итог завершённого научного исследования. Цветные карты границ областей с качественно различным поведением являются украшением многих современных научных журналов.

◆◆ Важность задач различных типов для теории колебаний **возрастает** в использованном выше порядке их перечисления.

Главной является задача исследования динамической системы (4).

Исследование структуры фазового пространства (3) является необходимой предпосылкой решения главной задачи.

Исследование устойчивости (2) имеет вспомогательный характер.

Решение задачи Коши (1) почти никогда не рассматривается.