

## V15 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

### § 01 Модели с запаздыванием

◆ В этом разделе будут рассмотрены колебания в системах, которые описываются *дифференциальными-разностными уравнениями* от одной динамической переменной  $x(t)$ . Такие уравнения связывают значения функции и ее производных в момент времени  $t$  со значениями этих же величин, взятых в моменты времени, отличающиеся на константу  $\tau$ :

$$x_\tau = x(t - \tau) \quad (1)$$

Другое название уравнений, описывающих модели этого класса - дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. В физике такие модели обычно используются для описания систем с запаздыванием. Важную роль такие модели также играют в задачах математической биофизики. Приведем два примера.

❖ **Пример 1.** В V03 рассматривалась модель численности популяции, введенная Ферхюльстом и учитывающая ограниченность ресурсов

$$\dot{N} = aN - bN^2 \quad (2)$$

В ряде случаев важно учесть, что конкуренция за ресурс сильнее всего между особями разных возрастов. Модель (2) обобщается уравнением

$$\dot{N} = (a - bN_\tau)N, \quad (3)$$

где интервал  $\tau$  - порядка времени жизни одного поколения [СЛ78, с.21].

[СЛ78] Свирижев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. – 352 с.

❖ **Пример 2.** Широко известна модель, введенная Мэки и Глассом (Mackey M.C., Glass L. 1977) для описания численности белых кровяных клеток

$$\dot{x} = -bx + a \frac{x_\tau}{1 + x_\tau^n}. \quad (4)$$

Для здоровых людей  $b = 0.1 \text{ сут}^{-1}$ ,  $a = 0.2 \text{ сут}^{-1}$ ,  $\tau=6 \text{ сут}$  и  $n = 10$  [ГМ91, с.87].

[ГМ91] Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. – 248 с.

◆ Решение **нелинейных** дифференциальных-разностных уравнений, подобных (3) и (4), представляет очень сложную задачу, часто неподвластную методам теории колебаний. Однако при исследовании устойчивости неподвижных точек таких моделей возникает необходимость рассмотрения линейной модели с запаздыванием – которой мы и ограничимся.

### § 02 Линейная модель первого порядка

◆ Рассмотрим простейшую модель с запаздыванием - линейную систему первого порядка с уравнением движения

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 x + \beta_1 x_\tau, \quad (5)$$

Уравнение (5) возникает в задаче об исследовании устойчивости неподвижной точки **общего** уравнения первого порядка с запаздыванием вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x, x_\tau). \quad (6)$$

Для того, чтобы решить уравнение (1), нужно в качестве начальных условий задать **бесконечное** множество значений переменной  $x(t)$  в любой момент из интервала  $[0, \tau]$ . Поэтому с формальной точки зрения уравнение (5) обладает бесконечной размерностью фазового пространства  $K$  (бесконечным числом степеней свободы  $N$ ). Однако методы решения таких уравнений во многом схожи с методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений, а поведение решений не очень чувствительно к деталям начальных условий.

◆ Выберем в качестве единицы времени величину интервала запаздывания  $\tau$ . Решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta x_1, \quad (7)$$

где  $\alpha = \alpha_1\tau$ ,  $\beta = \beta_1\tau$ ,  $x_1 = x(t-1)$ , возможно **методом последовательного интегрирования** [БК67, с.57-61].

[БК67] Беллман Р. и Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. - 548 с.

Пусть для примера начальные условия соответствуют постоянству функции на интервале  $[0,1]$ :

$$x(t) = 1 \quad 0 \leq t < 1. \quad (8)$$

Тогда на интервале  $[1,2]$  функция  $x(t)$  будет удовлетворять уравнению

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta, \quad (9)$$

решение которого, непрерывное в точке  $t = 1$ , имеет вид

$$x(t) = -\frac{\beta}{\alpha} + \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-1)}. \quad (10)$$

На следующем единичном интервале  $[2,3]$  функция будет определяться уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \frac{\beta^2}{\alpha} + \beta \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-1)}, \quad (11)$$

решение которого имеет вид

$$x(t) = Ce^{\alpha t} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \beta t \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-1)}. \quad (12)$$

Константа  $C$  определяется условием непрерывности функции  $x(t)$  в точке  $t = 2$ .

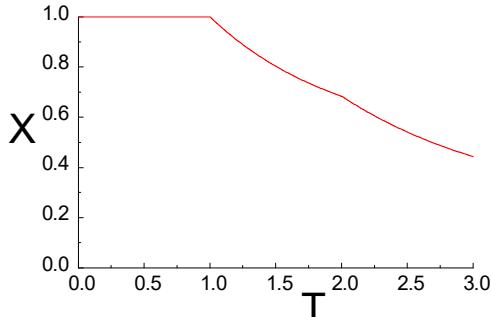


Рис. V15.1

Решение дифференциально-разностного уравнения (7) при значениях параметров  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1/2$  и начальных условиях  $x(t) = 1$  ( $0 \leq x < 1$ ).

Из этого примера видно, что даже при простейших начальных условиях применение метода последовательного интегрирования мало пригодно для ответа на качественный вопрос об устойчивости неподвижной точки - вопрос о том, является ли решение  $x(t)$  растущим или убывающим по абсолютной величине при больших значениях  $t$ .

◆ Рассмотрим другой подход к решению, основанный на рассмотрении частных решений уравнения (7). По аналогии с обычным линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, решение уравнения (7) будем искать в виде экспоненциальной функции:

$$x(t) = A \exp \lambda t. \quad (13)$$

Подстановка (13) в (7) приводит к следующему трансцендентному уравнению для характеристического показателя  $\lambda$ :

$$\lambda = \alpha + \beta e^{-\lambda}. \quad (14)$$

Совокупность корней уравнения (14) будем называть *спектром* этого уравнения. В общем случае значения  $\lambda$  комплексны. Положим

$$\lambda = u + iv, \quad (15)$$

где  $u$  и  $v$  - действительная и мнимая части  $\lambda$ . Подстановка (15) в (14) приводит к системе трансцендентных уравнений

$$-u + \alpha + \beta e^{-u} \cos v = 0, \quad (16)$$

$$v + \beta e^{-u} \sin v = 0. \quad (17)$$

Непосредственно из них видно, что если  $(u, v)$  - решения системы (16,17), то  $(u, -v)$  тоже является решением.

◆ Рассмотрим численные решения уравнений (16,17) при различных значениях параметров.

$\alpha = 1, \beta = -0.5$	$\alpha = -1, \beta = 0.5$
0.768	0
-1.687	0
-2.810	7.377
-3.368	13.831
-3.725	20.190
-3.988	26.518
	-3.855
	23.441

Из таблицы видно, что наибольшую величину действительной части имеет действительный корень уравнения (14). С ростом мнимой части действительные части корней убывают, становясь отрицательными.

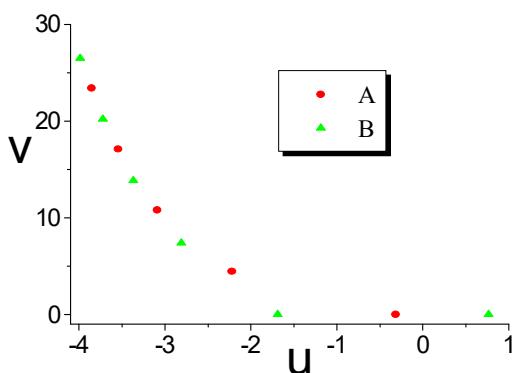


Рис. V15.2

Положение спектра дифференциально-разностного уравнения (7) при значениях параметров  $\alpha = 1, \beta = -1/2$  (**A**) и  $\alpha = -1, \beta = 1/2$  (**B**) на комплексной плоскости.

Рассмотрим действительные корни уравнения (14). Они определяются уравнением

$$-u + \alpha + \beta e^{-u} = 0. \quad (18)$$

При  $\beta > 0$  действительный корень этого уравнения всегда существует, и притом только один. Это следует из того, что непрерывная функция в левой части (18) монотонно убывает от неограниченно больших положительных (при  $u \rightarrow -\infty$ ) до неограниченно больших отрицательных (при  $u \rightarrow \infty$ ) значений.

При  $\beta < 0$  уравнение (18) может иметь два корня или не иметь ни одного. Граница между этими областями параметров определяется из условия существования у уравнения (18) двукратного корня. В точке двукратного корня производная функции в левой части (18) должна обратиться в ноль. Из системы уравнений

$$-u + \alpha + \beta e^{-u} = 0, \quad -1 - \beta e^{-u} = 0 \quad (19)$$

находим уравнение критической линии

$$\beta_c = -e^{\alpha-1}. \quad (20)$$

При  $\beta < \beta_c$  уравнение (18) не имеет вещественных корней.

◆ Общее решение уравнения (7) можно представить в виде суперпозиции его частных решений, имеющих экспоненциальную форму:

$$x(t) = \sum_k A_k \exp \lambda_k t \quad (21)$$

Если все принадлежащие спектру значения  $\lambda_k$  имеют отрицательные действительные части, то решение вида (21) при произвольных начальных условиях при  $t \rightarrow \infty$  будет стремиться к нулю. Область параметров, в которой выполняется это условие, называется **областью устойчивости**.

◆ Границы областей устойчивости на плоскости параметров  $\{\alpha, \beta\}$  определяются системой уравнений (16,17) при значении  $u = 0$ .

❖ Отметим аналогию с определением границ устойчивости линейной системы при параметрическом резонансе (V12).

Из уравнения (16) следует, что при  $v = 0$  одной из границ является прямая

$$\alpha + \beta = 0 \quad (22)$$

При  $v \neq 0$  границы областей устойчивости на плоскости параметров  $\{\alpha, \beta\}$  определяются кривыми, которые в параметрической форме задаются уравнениями

$$\alpha = v \operatorname{ctg} v, \quad \beta = -\frac{v}{\sin v} \quad (23)$$

Каждому интервалу изменения  $v$  от  $n\pi$  до  $(n+1)\pi$  соответствует отдельная ветвь этой кривой.

Ближайшая к началу координат область устойчивости, ограниченная прямой (22) и кривой (23) с  $0 < v < \pi$ , пересекающимися в точке  $\alpha = \beta = -1$ , показана на рис. V15.3.

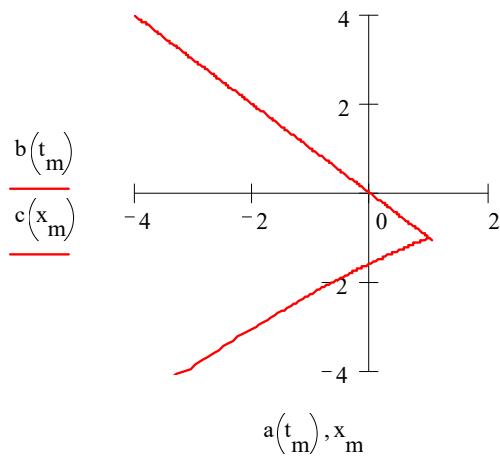


Рис. V15.3

Границы области устойчивости дифференциально-разностного уравнения (7) на плоскости параметров  $\{\alpha, \beta\}$ .

◆ Общее решение (21) уравнения (7) формально включает бесконечное число экспоненциальных компонент. Однако экспоненциальные члены с большими значениями  $u$  и  $v$  быстро затухают, поэтому практическое решение можно получить, оставив в сумме (21) лишь несколько компонент с показателями, имеющими наименьшие отрицательные вещественные части.

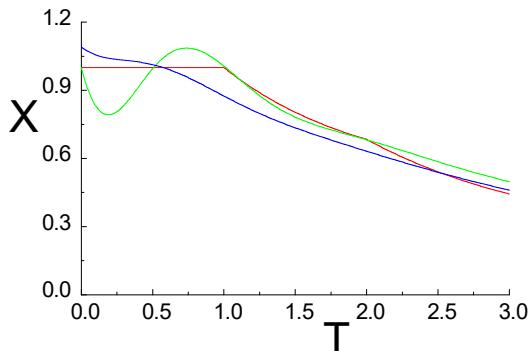


Рис. V15.4

Приближенное решение уравнения (7) при тех же значениях параметров в трехмодовом приближении

$$x(t) = 1.282 \exp(-0.315t)$$

$$- 0.282 \exp(-2.221t) \cos(4.444t)$$

$$- 0.597 \exp(-2.221t) \sin(4.444t)$$

◆ Решение уравнения (7) хорошо аппроксимируется небольшим числом экспоненциальных функций, что указывает на возможность приблизить само уравнение обыкновенным дифференциальным уравнением конечного порядка с постоянными коэффициентами. В уравнении

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(t) + \beta x(t-1) \quad (24)$$

функцию  $x(t-1)$  можно разложить в ряд Тейлора в точке  $t$  и взять конечное число членов.

❖ Определение характеристических показателей такого уравнения не намного проще, чем решение трансцендентного уравнения (14). Однако при некоторых комбинациях параметров (например, при  $|\beta| \ll |\alpha|$ ) характеристические показатели при таком подходе могут быть выражены простыми формулами. По существу указанный подход эквивалентен разложению экспоненциальной функции в уравнении (14) в ряд и удержанию конечного числа членов.

В первом приближении получаем

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta x - \beta \frac{dx}{dt} \quad (25)$$

откуда для (единственного) вещественного показателя получаем

$$\lambda_0 = \frac{\alpha + \beta}{1 + \beta}. \quad (26)$$

При значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , соответствующих примеру в приведенной выше таблице, формула (26) дает  $\lambda_0 = 1.00$  и  $\lambda_0 = -0.33$ ; точные значения показателей равны  $\lambda_0 = 0.768$  и  $\lambda_0 = -0.315$  соответственно.

Во втором приближении максимальное действительное значение характеристического показателя дается формулой

$$\lambda_0 = \frac{1 + \beta - \sqrt{1 + 2\beta - 2\alpha\beta - \beta^2}}{\beta} \quad (27)$$

При значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , соответствующих примеру в приведенной выше таблице, формула (27) дает значения  $\lambda_0 = 0.732$  и  $\lambda_0 = -0.317$ .

❖ Исследование областей устойчивости в этом параграфе изложено в соответствии с работой

[AM46] Андронов А.А., Майер А.Г. Простейшие линейные системы с запаздыванием. Автоматика и телемеханика, 1946, т.7, №2-3, с. 15-41 (также [A56, с.347-358]).

◆◆ Хотя линейные дифференциально-разностные системы выходят за рамки класса конечномерных динамических моделей, для исследования основных свойств таких систем оказываются эффективны стандартные подходы теории колебаний - представление решения в виде модулированного гармонического колебания (13) и представление решения в виде суперпозиции мод (21).

Основная задача исследования спектра и областей устойчивости при этом сводится к исследованию комплексных корней трансцендентного уравнения (14).

