

V15 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

§ 01 Модели с запаздыванием

◆ В этом разделе будут рассмотрены колебания в системах, которые описываются *дифференциально-разностными уравнениями* от одной динамической переменной $x(t)$. Такие уравнения связывают значения функции и ее производных в момент времени t со значениями этих же величин, взятых в моменты времени, отличающиеся на константу τ :

$$x_\tau = x(t - \tau) \quad (1)$$

Другое название уравнений, описывающих модели этого класса - дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. В физике такие модели обычно используются для описания систем с запаздыванием. Важную роль такие модели также играют в задачах математической биофизики. Приведем два примера.

✧ **Пример 1.** В V03 рассматривалась модель численности популяции, введенная Ферхюльстом и учитывающая ограниченность ресурсов

$$\dot{N} = aN - bN^2 \quad (2)$$

В ряде случаев важно учесть, что конкуренция за ресурс сильнее всего между особями разных возрастов. Модель (2) обобщается уравнением

$$\dot{N} = (a - bN_\tau)N, \quad (3)$$

где интервал τ - порядка времени жизни одного поколения [СЛ78, с.21].

[СЛ78] Свирижев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. – 352 с.

✧ **Пример 2.** Широко известна модель, введенная Мэки и Глассом (Mackey M.C., Glass L. 1977) для описания численности белых кровяных клеток

$$\dot{x} = -bx + a \frac{x_\tau}{1 + x_\tau^n}. \quad (4)$$

Для здоровых людей $b = 0.1 \text{ сут}^{-1}$, $a = 0.2 \text{ сут}^{-1}$, $\tau = 6 \text{ сут}$ и $n = 10$ [ГМ91, с.87].

[ГМ91] Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. – 248 с.

◆ Решение **нелинейных** дифференциально-разностных уравнений, подобных (3) и (4), представляет очень сложную задачу, часто неподвластную методам теории колебаний. Однако при исследовании устойчивости неподвижных точек таких моделей возникает необходимость рассмотрения линейной модели с запаздыванием – которой мы и ограничимся.

§ 02 Линейная модель первого порядка

◆ Рассмотрим простейшую модель с запаздыванием - линейную систему первого порядка с уравнением движения

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 x + \beta_1 x_\tau, \quad (5)$$

Уравнение (5) возникает в задаче об исследовании устойчивости неподвижной точки **общего** уравнения первого порядка с запаздыванием вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x, x_\tau). \quad (6)$$

Для того, чтобы решить уравнение (1), нужно в качестве начальных условий задать **бесконечное** множество значений переменной $x(t)$ в любой момент из интервала $[0, \tau]$. Поэтому с формальной точки зрения уравнение (5) обладает бесконечной размерностью фазового пространства K (бесконечным числом степеней свободы N). Однако методы решения таких уравнений во многом схожи с методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений, а поведение решений не очень чувствительно к деталям начальных условий.

♦ Выберем в качестве единицы времени величину интервала запаздывания τ .
Решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta x_1, \quad (7)$$

где $\alpha = \alpha_1 \tau$, $\beta = \beta_1 \tau$, $x_1 = x(t-1)$, возможно **методом последовательного интегрирования** [БК67, с.57-61].

[БК67] Беллман Р. и Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. - 548 с.

Пусть для примера начальные условия соответствуют постоянству функции на интервале $[0, 1]$:

$$x(t) = 1 \quad 0 \leq t < 1. \quad (8)$$

Тогда на интервале $[1, 2]$ функция $x(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta, \quad (9)$$

решение которого, непрерывное в точке $t = 1$, имеет вид

$$x(t) = -\frac{\beta}{\alpha} + \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-1)}. \quad (10)$$

На следующем единичном интервале $[2, 3]$ функция будет определяться уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \frac{\beta^2}{\alpha} + \beta \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-1)}, \quad (11)$$

решение которого имеет вид

$$x(t) = Ce^{\alpha t} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \beta t \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-1)}. \quad (12)$$

Константа C определяется условием непрерывности функции $x(t)$ в точке $t = 2$.

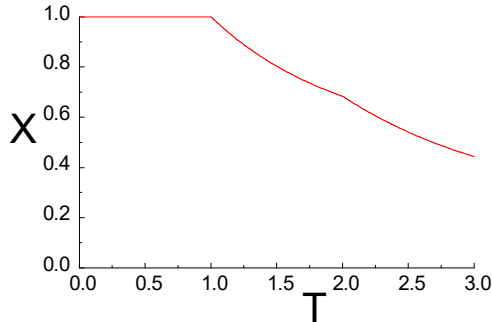


Рис. V15.1

Решение дифференциально-разностного уравнения (7) при значениях параметров $\alpha = -1$, $\beta = 1/2$ и начальных условиях $x(t) = 1$ ($0 \leq x < 1$).

Из этого примера видно, что даже при простейших начальных условиях применение метода последовательного интегрирования мало пригодно для ответа на качественный вопрос об устойчивости неподвижной точки - вопрос о том, является ли решение $x(t)$ растущим или убывающим по абсолютной величине при больших значениях t .

◆ Рассмотрим другой подход к решению, основанный на рассмотрении частных решений уравнения (7). По аналогии с обычным линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, решение уравнения (7) будем искать в виде экспоненциальной функции:

$$x(t) = A \exp \lambda t. \quad (13)$$

Подстановка (13) в (7) приводит к следующему трансцендентному уравнению для характеристического показателя λ :

$$\lambda = \alpha + \beta e^{-\lambda}. \quad (14)$$

Совокупность корней уравнения (14) будем называть **спектром** этого уравнения. В общем случае значения λ комплексны. Положим

$$\lambda = u + iv, \quad (15)$$

где u и v - действительная и мнимая части λ . Подстановка (15) в (14) приводит к системе трансцендентных уравнений

$$-u + \alpha + \beta e^{-u} \cos v = 0, \quad (16)$$

$$v + \beta e^{-u} \sin v = 0. \quad (17)$$

Непосредственно из них видно, что если (u, v) - решения системы (16,17), то $(u, -v)$ тоже является решением.

◆ Рассмотрим численные решения уравнений (16,17) при различных значениях параметров.

$\alpha = 1, \beta = -0.5$		$\alpha = -1, \beta = 0.5$	
0.768	0		
-1.687	0	-0.315	0
-2.810	7.377	-2.221	4.444
-3.368	13.831	-3.091	10.804
-3.725	20.190	-3.545	17.131
-3.988	26.518	-3.855	23.441

Из таблицы видно, что наибольшую величину действительной части имеет действительный корень уравнения (14). С ростом мнимой части действительные части корней убывают, становясь отрицательными.

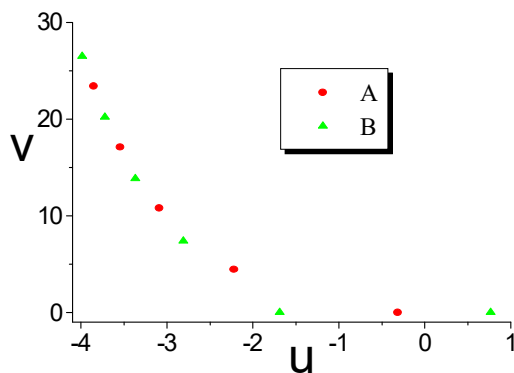


Рис. V15.2

Положение спектра дифференциально-разностного уравнения (7) при значениях параметров $\alpha = 1, \beta = -1/2$ (A) и $\alpha = -1, \beta = 1/2$ (B) на комплексной плоскости.

Рассмотрим действительные корни уравнения (14). Они определяются уравнением

$$-u + \alpha + \beta e^{-u} = 0. \quad (18)$$

При $\beta > 0$ действительный корень этого уравнения всегда существует, и притом только один. Это следует из того, что непрерывная функция в левой части (18) монотонно убывает от неограниченно больших положительных (при $u \rightarrow -\infty$) до неограниченно больших отрицательных (при $u \rightarrow \infty$) значений.

При $\beta < 0$ уравнение (18) может иметь два корня или не иметь ни одного. Граница между этими областями параметров определяется из условия существования у уравнения (18) двукратного корня. В точке двукратного корня производная функции в левой части (18) должна обратиться в ноль. Из системы уравнений

$$-u + \alpha + \beta e^{-u} = 0, \quad -1 - \beta e^{-u} = 0 \quad (19)$$

находим уравнение критической линии

$$\beta_c = -e^{\alpha-1}. \quad (20)$$

При $\beta < \beta_c$ уравнение (18) не имеет вещественных корней.

◆ Общее решение уравнения (7) можно представить в виде суперпозиции его частных решений, имеющих экспоненциальную форму:

$$x(t) = \sum_k A_k \exp \lambda_k t \quad (21)$$

Если все принадлежащие спектру значения λ_k имеют отрицательные действительные части, то решение вида (21) при произвольных начальных условиях при $t \rightarrow \infty$ будет стремиться к нулю. Область параметров, в которой выполняется это условие, называется **областью устойчивости**.

◆ Границы областей устойчивости на плоскости параметров $\{\alpha, \beta\}$ определяются системой уравнений (16,17) при значении $u = 0$.

✧ Отметим аналогию с определением границ устойчивости линейной системы при параметрическом резонансе (V12).

Из уравнения (16) следует, что при $v = 0$ одной из границ является прямая

$$\alpha + \beta = 0 \quad (22)$$

При $v \neq 0$ границы областей устойчивости на плоскости параметров $\{\alpha, \beta\}$ определяются кривыми, которые в параметрической форме задаются уравнениями

$$\alpha = v \operatorname{ctg} v, \quad \beta = -\frac{v}{\sin v} \quad (23)$$

Каждому интервалу изменения v от $n\pi$ до $(n+1)\pi$ соответствует отдельная ветвь этой кривой.

Ближайшая к началу координат область устойчивости, ограниченная прямой (22) и кривой (23) с $0 < v < \pi$, пересекающимися в точке $\alpha = \beta = -1$, показана на рис. V15.3.

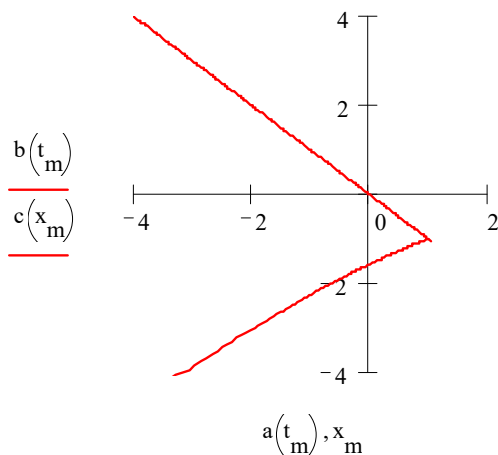


Рис. V15.3

Границы области устойчивости дифференциально-разностного уравнения (7) на плоскости параметров $\{\alpha, \beta\}$.

◆ Общее решение (21) уравнения (7) формально включает бесконечное число экспоненциальных компонент. Однако экспоненциальные члены с большими значениями u и v быстро затухают, поэтому практическое решение можно получить, оставив в сумме (21) лишь несколько компонент с показателями, имеющими наименьшие отрицательные вещественные части.

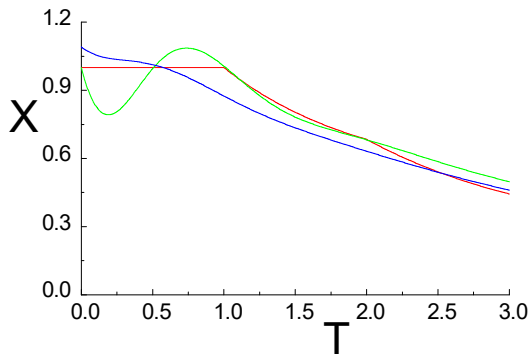


Рис. V15.4

Приближенное решение уравнения (7) при тех же значениях параметров в трехмодовом приближении

$$x(t) = 1.282 \exp(-0.315t)$$

$$- 0.282 \exp(-2.221t) \cos(4.444t)$$

$$- 0.597 \exp(-2.221t) \sin(4.444t)$$

◆ Решение уравнения (7) хорошо аппроксимируется небольшим числом экспоненциальных функций, что указывает на возможность приблизить само уравнение обыкновенным дифференциальным уравнением конечного порядка с постоянными коэффициентами. В уравнении

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(t) + \beta x(t-1) \quad (24)$$

функцию $x(t-1)$ можно разложить в ряд Тейлора в точке t и взять конечное число членов.

✧ Определение характеристических показателей такого уравнения не намного проще, чем решение трансцендентного уравнения (14). Однако при некоторых комбинациях параметров (например, при $|\beta| \ll |\alpha|$) характеристические показатели при таком подходе могут быть выражены простыми формулами. По существу указанный подход эквивалентен разложению экспоненциальной функции в уравнении (14) в ряд и удержанию конечного числа членов.

В первом приближении получаем

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta x - \beta \frac{dx}{dt} \quad (25)$$

откуда для (единственного) вещественного показателя получаем

$$\lambda_0 = \frac{\alpha + \beta}{1 + \beta}. \quad (26)$$

При значениях параметров α и β , соответствующих примеру в приведенной выше таблице, формула (26) дает $\lambda_0 = 1.00$ и $\lambda_0 = -0.33$; точные значения показателей равны $\lambda_0 = 0.768$ и $\lambda_0 = -0.315$ соответственно.

Во втором приближении максимальное действительное значение характеристического показателя дается формулой

$$\lambda_0 = \frac{1 + \beta - \sqrt{1 + 2\beta - 2\alpha\beta - \beta^2}}{\beta} \quad (27)$$

При значениях параметров α и β , соответствующих примеру в приведенной выше таблице, формула (27) дает значения $\lambda_0 = 0.732$ и $\lambda_0 = -0.317$.

✧ Исследование областей устойчивости в этом параграфе изложено в соответствии с работой

[АМ46] Андронов А.А., Майер А.Г. Простейшие линейные системы с запаздыванием. Автоматика и телемеханика, 1946, т.7, №2-3, с. 15-41 (также [А56, с.347-358]).

◆◆ Хотя линейные дифференциально-разностные системы выходят за рамки класса конечномерных динамических моделей, для исследования основных свойств таких систем оказываются эффективны стандартные подходы теории колебаний - представление решения в виде модулированного гармонического колебания (13) и представление решения в виде суперпозиции мод (21).

Основная задача исследования спектра и областей устойчивости при этом сводится к исследованию комплексных корней трансцендентного уравнения (14).

