

V14 НЕЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Ранее рассматривалась задача о синхронизации колебаний автоколебательной системы под действием внешней гармонической силы. Источником такой силы, вообще говоря, является какая-то другая колебательная система. В общем случае эти две системы взаимно влияют друг на друга. Иногда можно считать, что в одной из систем запасено много больше энергии, чем в другой, и обратным влиянием второй системы на нее можно пренебречь. Однако возможны ситуации, когда следует учитывать обоюдное влияние систем друг на друга. В случае линейных взаимодействующих систем колебания на частотах нормальных мод происходят независимо. В присутствии нелинейности происходит перекачка энергии между модами, что приводит к **конкуренции мод**. Поэтому нас будет интересовать, возможно ли в такой системе квазипериодическое движение с двумя различными частотами, или же в результате перекачки энергии выживают колебания только на одной из них.

§ 01 Взаимодействие нелинейных диссипативных осцилляторов

◆ Характер взаимодействия нелинейных колебательных систем может быть весьма разнообразным, установить общие свойства поведения столь сложных систем практически невозможно. Поэтому рассмотрим лишь один простейший пример – взаимодействие осциллятора Ван дер Поля с гармоническим осциллятором:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - \alpha \dot{x} (1 - x^2) + x + \beta y &= 0 \\ \ddot{y} + \delta \dot{y} + \Omega^2 y + \beta x &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

При этом мы будем считать диссипацию обоих осцилляторов достаточно малой $\alpha, \delta \ll 1, \Omega, \beta$. Диссипация осциллятора Ван дер Поля знакопеременна – как положено автоколебательной системе, ее физический прототип должен иметь какой-то источник энергии. Однако теперь эта энергия в результате взаимодействия перераспределяется между двумя осцилляторами.

◆ В отсутствие диссипации $\alpha, \delta = 0$ собственные частоты взаимодействующих систем определяются выражением

$$\omega_{1,2}^2 = 1 + \beta \left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 1} \right),\tag{2}$$

где $\Delta = (\Omega^2 - 1)/2\beta$, полученным для частот нормальных мод в примере 2 предыдущей лекции. В присутствии нелинейности нормальные моды обмениваются энергией. По аналогии с динамикой автоколебательной системы под действием внешней силы можно предполагать, что в зависимости от параметров возможно как периодическое одночастотное движение, так и квазипериодическое двухчастотное.

§ 02 Периодическое движение

◆ Будем искать периодическое движение системы с частотой ω , подлежащей определению. Если $x = A \cos \omega t$, нелинейный член в осцилляторе Ван дер Поля имеет вид:

$$\dot{x}x^2 = -\omega A^3 \sin \omega t \cos^2 \omega t = -\omega A^3 \frac{\sin \omega t + \sin 3\omega t}{4}. \quad (3)$$

Так как нас интересуют колебания на основной частоте, быстрыми колебаниями на частоте 3ω можно пренебречь и записать

$$\dot{x}x^2 \approx -\omega A^3 \frac{\sin \omega t}{4} = \frac{A^2}{4} \dot{x}. \quad (4)$$

Тогда исходную систему можно записать в форме линейной системы, в которой коэффициент диссипации в первом уравнении дополнительно зависит от амплитуды колебаний:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \alpha \left(1 - \frac{A^2}{4}\right) \dot{x} + x + \beta y &= 0 \\ \ddot{y} + \delta \dot{y} + \Omega^2 y + \beta x &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя в полученную систему решение в виде $x, y \sim e^{i\omega t}$, получаем характеристическое уравнение

$$\left\{1 - \omega^2 - i\alpha\omega \left(1 - \frac{A^2}{4}\right)\right\} \left\{\Omega^2 - \omega^2 + i\omega\delta\right\} - \beta^2 = 0. \quad (6)$$

Так как нас интересуют установившиеся колебания с действительной частотой, можно выделить в этом уравнении отдельно действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{A^2}{4} &= \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 - \Omega^2} \frac{\delta}{\alpha} \\ (\omega^2 - 1)(\omega^2 - \Omega^2) + \alpha\delta\omega^2 \left(1 - \frac{A^2}{4}\right) &= \beta^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Первое уравнение позволяет определить амплитуду колебаний. Подставляя его во второе, получаем уравнение, из которого можно найти частоту возможных в системе колебаний:

$$(\omega^2 - 1)(\omega^2 - \Omega^2) + \delta^2\omega^2 \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 - \Omega^2} = \beta^2. \quad (8)$$

Относительно ω^2 это кубическое уравнение, поэтому проще решить его относительно $\Omega(\omega)$:

$$\Omega^2 = \omega^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\beta^2}{1-\omega^2} \pm \sqrt{\frac{\beta^4}{(1-\omega^2)^2} - 4\delta^2\omega^2} \right\}. \quad (9)$$

Зависимость $\omega(\Omega)$ показана на рис. V14.1. Отличие частот колебаний от частот нормальных мод системы без диссипации имеет второй порядок малости по δ . При условии $0 < \delta < \beta$ существует диапазон частот Ω , в котором система имеет три различных решения. Можно предположить, что, как обычно в таких ситуациях, средняя ветвь неустойчива, а зависимость частоты колебаний системы от разности частот взаимодействующих осцилляторов может иметь гистерезисный характер.

Однако не исключен и другой вариант – в области бистабильности может иметь место квазипериодическое движение с частотами колебаний, соответствующих верхней и нижней ветви на рис. V14.1. Эта возможность будет рассмотрена в следующем параграфе.

При больших коэффициентах затухания гармонического осциллятора δ бистабильность пропадает. Отметим, что частота колебаний системы не зависит от величины коэффициента диссипации осциллятора Ван дер Поля α – от него зависит только амплитуда колебаний, определяемая первым из уравнений (7), причем при большой величине отношения $\mu = \delta/\alpha$ эта амплитуда становится мнимой – в этом случае периодического решения системы не существует.

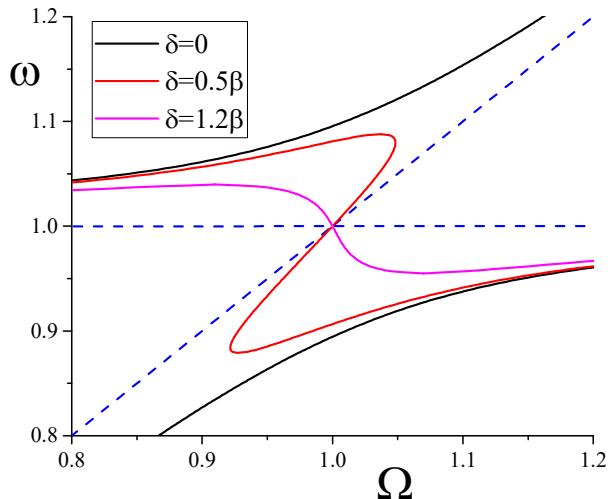


Рис. V14.1

Решение $\omega(\Omega)$ характеристического уравнения (8) для совместной частоты колебаний осциллятора Ван дер Поля и гармонического осциллятора при различных значениях отношения δ/β . Случай $\delta/\beta = 0$ соответствует частотам нормальных колебаний осцилляторов без диссипации и совпадает с графиком на рис. V13.1.

§ 03 Квазипериодическое движение

◆ Будем искать квазипериодическое движение обоих осцилляторов в виде разложения по нормальным модам системы без диссипации

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_1 t + \varphi) + B \cos(\omega_2 t + \psi), \\ y &= f_1 A \cos(\omega_1 t + \varphi) + f_2 B \cos(\omega_2 t + \psi). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\omega_{1,2}$ - частоты нормальных мод (2), а $f_{1,2}$ - соотношения между амплитудами колебаний двух связанных осцилляторов на частотах нормальных мод:

$$f_{1,2} = \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 1}. \quad (11)$$

Амплитуды A и B и фазы φ и ψ в случае ненулевой диссипации следует считать медленно меняющимися функциями времени. Изменение амплитуд описывает перекачку энергии между нормальными модами за счет нелинейности системы, а зависимость от времени фаз – поправку к частотам колебаний. Решение в виде (10) в уравнения (1) и пренебрегая величинами второго порядка малости $\ddot{A}, \dot{A}\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \ddot{B}, \dot{B}\dot{\psi}, \ddot{\psi}$, а также произведениями α и δ на первые производные амплитуд и фаз, получаем систему уравнений, описывающих изменения амплитуд и фаз в решении (10):

$$\begin{aligned} 2\omega_1 a + 2\omega_2 b &= \alpha P, \\ 2\omega_1 f_1 a + 2\omega_2 f_2 b &= -\delta Q, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \dot{A} \sin \chi_1 + A \dot{\varphi} \cos \chi_1, \\ b &= \dot{B} \sin \chi_2 + B \dot{\psi} \cos \chi_2, \\ Q &= \omega_1 f_1 A \sin \chi_1 + \omega_2 f_2 B \sin \chi_2, \\ P &= (\omega_1 A \sin \chi_1 + \omega_2 B \sin \chi_2) * \\ &\quad * (1 - A^2 \cos \chi_1 - B^2 \cos \chi_2 - 2AB \cos \chi_1 \cos \chi_2), \end{aligned} \quad (13)$$

а фазы $\chi_1 = \omega_1 t + \varphi$ и $\chi_2 = \omega_2 t + \psi$. Производные амплитуд и фаз входят в эти уравнения только в виде комбинаций a и b . Выражая их из уравнений (12), получаем:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\alpha f_2 P + \delta Q}{2\omega_1 (f_1 - f_2)}, \\ b &= \frac{\alpha f_1 P + \delta Q}{2\omega_2 (f_1 - f_2)}. \end{aligned} \quad (14)$$

В этих выражениях все еще присутствуют «быстрые» компоненты с частотами $\omega_{1,2}$. Домножая их на $\cos \chi_{1,2}$ и $\sin \chi_{1,2}$, и, усредняя по быстрым осцилляциям, получаем уравнения для медленно меняющихся величин:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\frac{\delta f_1 + \alpha f_2}{f_1 - f_2} \frac{A}{2} + \frac{\alpha f_2}{4(f_1 - f_2)} \frac{A}{2} (A^2 + 2B^2) \\ \dot{B} &= \frac{\alpha f_1 + \delta f_2}{f_1 - f_2} \frac{B}{2} - \frac{\alpha f_1}{4(f_1 - f_2)} \frac{B}{2} (2A^2 + B^2) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= 0 \\ \dot{\psi} &= 0\end{aligned}\tag{16}$$

Из уравнений (16) следует, что фазы остаются постоянными, то есть в данном приближении, имеющем первый порядок малости по величинам δ, α , поправок к частотам нормальных мод нет. Как мы видели раньше (9), поправки к частоте возникают во втором порядке малости по величине диссипации, и в данном решении не учтены. А вот амплитуды будут меняться в соответствии с системой уравнений (15).

§ 04 Конкуренция мод

◆ Можно домножить первое уравнение (15) на A , а второе на B и перейти к системе уравнений для квадратов амплитуд $F = A^2$ и $G = B^2$. Учитывая, что $f_1 > 0$ и $f_2 < 0$ (11), удобно ввести обозначение $\rho = -f_2/f_1$. При изменении частоты Ω от нуля до бесконечности этот параметр уменьшается от бесконечности до нуля. Тогда система (15) принимает вид:

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \frac{\alpha f_1}{f_1 - f_2} \left\{ 1 - \frac{\mu}{\rho} - \frac{1}{4}(F + 2G) \right\} \rho F, \\ \dot{G} &= \frac{\alpha f_1}{f_1 - f_2} \left\{ 1 - \rho\mu - \frac{1}{4}(2F + G) \right\} G,\end{aligned}\tag{17}$$

◆ Полученная двумерная динамическая система (17) поддается привычному нам анализу структуры фазового пространства, которая определяется значениями двух параметров ρ и $\mu = \delta/\alpha$ (коэффициент перед фигурными скобками определяет только скорости изменения амплитуд). Система имеет четыре неподвижных точки:

$$\textcircled{1} \quad F_1 = 0, G_1 = 0; \tag{18}$$

$$\textcircled{2} \quad F_2 = 0, G_2 = 4(1 - \rho\mu); \tag{19}$$

$$\textcircled{3} \quad F_3 = 4(1 - \mu/\rho), G_3 = 0; \tag{20}$$

$$\textcircled{4} \quad F_4 = 4(1 + \mu/\rho - 2\rho\mu)/3, G_4 = 4(1 + \rho\mu - 2\mu/\rho)/3. \tag{21}$$

Матрица устойчивости системы (17) имеет вид

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \rho - \mu - \frac{\rho}{2}(F + G) & -\frac{\rho}{2}F \\ -\frac{1}{2}G & 1 - \rho\mu - \frac{1}{2}(F + G) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Для определения типа неподвижных точек следует найти след и детерминант матрицы устойчивости в этих точках.

$$\textcircled{1} \quad S_1 = (1 - \mu)(1 + \rho); \quad D_1 = -\mu(\rho - \mu) \left(\rho - \frac{1}{\mu} \right). \quad (23)$$

Если собственные частоты исходных систем существенно различаются $\rho > \mu, 1/\mu$, детерминант $D_1 < 0$, то есть точка является седлом. В обратном случае $\min(\mu, 1/\mu) < \rho < \max(\mu, 1/\mu)$ точка является узлом, устойчивость которого зависит от знака следа. Если $\mu > 1$, то $S_1 < 0$, и узел устойчив. Таким образом, точка, в которой амплитуды колебаний на частотах обеих мод равны нулю, устойчива, только если частоты исходных систем достаточно близки друг к другу, а диссипация энергии в гармоническом осцилляторе больше, чем приток энергии в осцилляторе Ван дер Поля.

$$\textcircled{2} \quad S_2 = 2\mu(1 + \rho) \left(\rho - \frac{1 + \mu}{2\mu} \right); \quad D_2 = (\rho\mu - 1)(2\mu\rho^2 - \rho - \mu). \quad (24)$$

Учитывая, что F и G - квадраты амплитуд, требуется дополнительно наложить условие их неотрицательности. В данном случае $G > 0$ при $\rho < 1/\mu$. След S_2 меняет знак при $\rho = (1 + \mu)/2\mu$, а детерминант D_2 – в точке $\rho = 1/\mu$, а также в точках, являющихся корнями квадратного уравнения $2\mu\rho^2 - \rho - \mu = 0$

$$\rho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8\mu^2}}{4\mu}. \quad (25)$$

Меньший из этих корней ρ_1 лежит в недостижимой для параметра ρ отрицательной области. Если $\mu < 1$, то для значений ρ , в которых след или детерминант меняют знак, выполняется цепочка неравенств $1 < \rho_2 < (1 + \mu)/2\mu < 1/\mu$. Отсюда следует, что условия устойчивости точки $\textcircled{2}$ $S_2 < 0$ и $D_2 > 0$ одновременно выполняются, если $\rho < \rho_2$. Если $\mu > 1$, то порядок ключевых значений ρ меняется на обратный: $1/\mu < (1 + \mu)/2\mu < \rho_2 < 1$. В этом случае точка $\textcircled{2}$ устойчива, если $\rho < 1/\mu$.

$$\textcircled{3} \quad S_3 = 2\mu(1 + \rho) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1 + \mu}{2\mu} \right); \quad D_3 = \rho^2 \left(\frac{\mu}{\rho} - 1 \right) \left(\frac{2\mu}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} - \mu \right). \quad (26)$$

Несложно заметить, что эти выражения (с точностью до положительных множителей) могут быть получены из выражений (24) заменой ρ на $1/\rho$. Условие $F > 0$ выполняется, если $\rho > \mu$, а след S_3 меняет знак при $\rho = 2\mu/(1 + \mu)$. Детерминант меняет знак в точке $\rho = \mu$ и еще в двух точках, из которых одна отрицательна, а вторая

$$\rho_3 = \frac{1}{\rho_2} = \frac{\sqrt{1 + 8\mu^2} - 1}{2\mu}. \quad (27)$$

Если $\mu < 1$, то $\mu < 2\mu/(1+\mu) < \rho_3 < 1$, и точка ③ устойчива при $\rho > \rho_3$. В обратном случае $\mu > 1$ точка ③ устойчива при условии $\rho > \mu$.

$$④ \quad S_4 = -\frac{1}{4}(\rho F + G); \quad D_4 = 0. \quad (28)$$

Учитывая, что квадраты амплитуд F и G больше нуля, след всегда отрицателен, то есть точка находится на границе между седлом и устойчивым узлом: один характеристический показатель у нее отрицателен, а второй равен нулю. Несложно проверить, что $F > 0$ и $G > 0$ при условии $\rho_3 < \rho < \rho_2$ (что возможно только при $\mu < 1$).

Однако этот результат получен в первом порядке малости по величинам коэффициентов диссипации. Учет следующих порядков малости мог бы уточнить отличие детерминанта от нуля – вероятно, эта точка все-таки является седлом, то есть квазипериодическое движение в данной системе всегда неустойчиво. На практике проверить устойчивость неподвижной точки в такой ситуации обычно проще с помощью численного моделирования динамики системы.

◆ Таким образом, система (17) может иметь различное поведение в зависимости от значений параметров ρ и μ . Для удобства знаки следа и детерминанта матрицы устойчивости для всех четырех неподвижных точек при различных значениях параметра ρ показаны на рис. V14.2 (при $\mu < 1$) и V14.3 (при $\mu > 1$).

Во всех случаях вдали от резонанса, когда собственные частоты систем существенно различаются, устойчивым является решение, при котором отлична от нуля только амплитуда колебаний на той частоте нормальной моды, которая близка к частоте колебаний осциллятора Ван де Поля. В случае малой диссипации $\delta < \alpha$ вблизи резонанса существует область бистабильности, в которой возможны колебания на любой из частот нормальных мод. В обратном случае большой диссипации вблизи резонанса все колебания затухают. Этот вывод качественно совпадает с анализом поведения системы в одночастотном приближении на рис. V14.1.

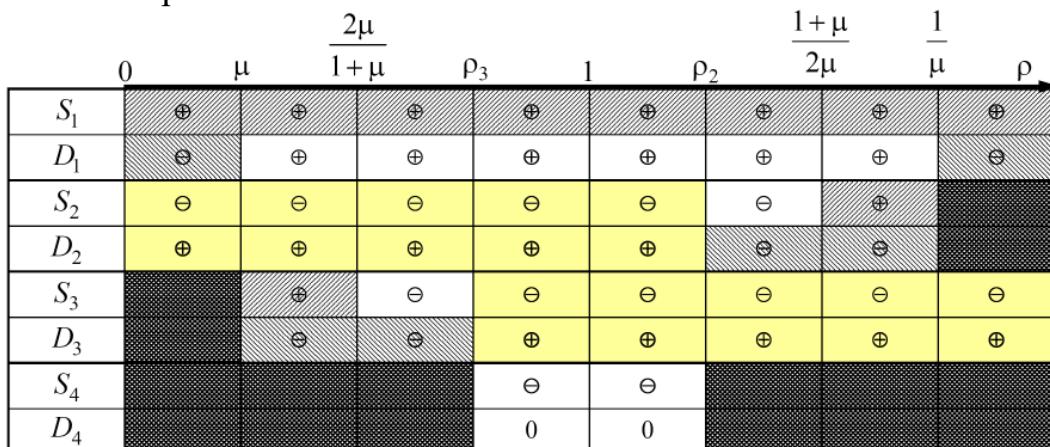


Рис. V14.2. Знаки следа и детерминанта матрицы устойчивости в неподвижных точках системы (17) при $\mu < 1$. Ячейки со знаками, соответствующими неустойчивым точкам ($S > 0, D < 0$) заштрихованы, в плотно заштрихованных ячейках квадраты амплитуд F и G отрицательны. Желтым цветом выделены области устойчивости.

	0	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1+\mu}{2\mu}$	ρ_2	1	ρ_3	$\frac{2\mu}{1+\mu}$	μ	ρ
S_1	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ
D_1	Θ	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	Θ	Θ
S_2	Θ								
D_2	\oplus								
S_3								Θ	
D_3								\oplus	
S_4									
D_4									

Рис. V14.3. Знаки следа и детерминанта матрицы устойчивости в неподвижных точках системы (17) при $\mu > 1$. Ячейки со знаками, соответствующими неустойчивым точкам ($S > 0, D < 0$) заштрихованы, в плотно заштрихованных ячейках квадраты амплитуд F и G отрицательны. Желтым цветом выделены области устойчивости.

◆ Квазипериодические колебания, при которых отличны от нуля амплитуды колебаний на частотах обеих нормальных мод, судя по всему, соответствуют центральной части S-образной зависимости на рис. V14.1.

Зависимость амплитуд колебаний в различных режимах от частоты гармонического осциллятора Ω показана на рис. V14.4. Легко видеть, что амплитуды, полученные в одночастотном (7) и квазипериодическим двухчастотном (19,20) приближениях, практически совпадают.

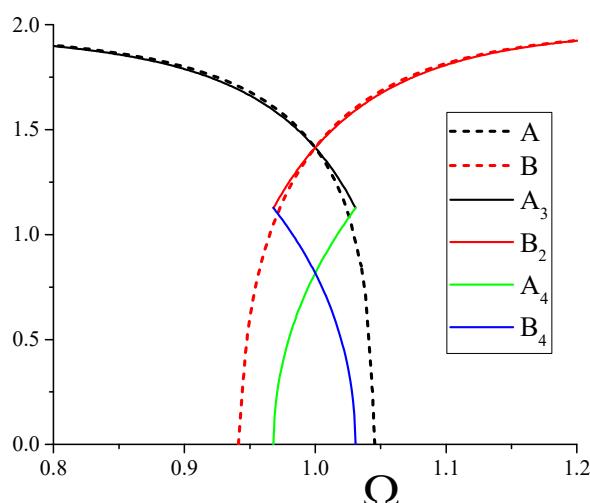


Рис. V14.4.

Зависимость амплитуд колебаний с частотами, близкими к частотам верхней (A) и нижней (B) ветвям нормальных мод при $\mu = 0.5$. Сплошными линиями показаны амплитуды, соответствующие устойчивым точкам ② и ③. Пунктиром показаны амплитуды колебаний, полученные в одночастотном приближении (7). Синим и зеленым показаны амплитуды неустойчивой неподвижной точки ④.

