V13 ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ 01 Уравнения движения и линеаризация

◆ Напомним, что уравнения движения произвольной динамической системы с размерностью фазового пространства K имеют вид

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}), \tag{1}$$

где $\vec{x}(t)$ - K-мерный вектор. Неподвижные точки $\vec{x}_0$ фазового пространства системы определяются уравнением

$$\vec{F}(\vec{x}_0) = 0, \tag{2}$$

а их устойчивость определяется *локальными характеристическими показателями* $\lambda_n(\vec{x}_0)$ матрицы устойчивости (см. V04)

$$M_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}. \tag{3}$$

Движение ДС вблизи неподвижной точки можно записать в виде суперпозиции

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0(t) + \sum_{n=1}^{K} \vec{C}_n e^{\lambda_n(\vec{x}_0)t}, \tag{4}$$

где коэффициенты $\vec{C}_n$ представляют собой вектора, соотвествующие движению системы с соотвествующим характристическим показателем и определяются начальными условиями. Неподвижная точка устойчива, если действительные части всех характеристических показателей неположительны $\mathrm{Re}\left(\lambda_n(\vec{x}_0)\right) \le 0$. Исследование движения ДС с $K \ge 4$ вдали от устойчивых неподвижных точек может представлять крайне сложную задачу.

◆ Исследование многомерных ДС может упростить наличие у них интегралов движения, позволяющих понизить размерность системы. Частным случаем интегрируемых динамических систем с $K = 2N \ge 4$ являются гамильтоновы автономные системы с N степенями свободы. Обычно функция Гамильтона имеет вид

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m_j} + U(\vec{q}). \tag{5}$$

K уравнений движения системы

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j},\ \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{p_j}{m_j} \tag{6}$$

можно также записать в виде N уравнений второго порядка

$$m_j\ddot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 \qquad (7)$$

Неподвижные точки системы определяются условием $\frac{\partial U\left(\vec{q}_0\right)}{\partial q_j} = 0$. Устойчивые неподвижные точки соответствуют минимумам потенциала $U\left(\vec{q}\right)$, в их окрестности разложим потенциальную энергию системы в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка по $\vec{\xi} = \vec{q} - \vec{q}_0$:

$$U(\vec{\xi}) = \frac{1}{2}\vec{\xi}\hat{k}\vec{\xi}, \qquad (8)$$

где $\hat{k}$ - симметричный положительно определенный тензор

$$k_{ij} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right|_{\vec{\xi}=0}, \qquad (9)$$

с $i, j = 1,2,...,N$. Уравнения движения ДС (7) в этом приближении

$$m_j\ddot{\xi}_j + \sum_{i=1}^{N} k_{ji}\xi_i = 0 \qquad (10)$$

представляют собой систему N однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами m_j и k_{ij}. Решение системы (10) ищем в виде

$$\xi_j = A_j e^{i\omega t}. \qquad (11)$$

Подставляя (11) в (10), получим систему N однородных уравнений для амплитуд A_j:

$$(-\omega^2 m_j + k_{ij})A_j = 0. \qquad (12)$$

Система (12) имеет нетривиальные решения, если ее определитель

$$\det\left|k_{ij} - \omega^2 m_j\right| = 0. \qquad (13)$$

Это уравнение N-ой степени называется *характеристическим* и имеет N вещественных положительных корней ω_α^2, называемыми *собственными* частотами системы. Вещественность корней уравнения (13) – следствие того, что уравнение (12) можно рассматривать как задачу на собственные значения и собственные функции эрмитова (самосогласованного) оператора $\hat{k}$, а их положительность – следствие его положительной определенности.

§ 02 Нормальные моды

◆ Решение характеристического уравнения позволяет определить собственные частоты ω_α ДС. В случае, если все они различны, для каждой частоты ω_α решение системы уравнений (12)

$$(-\omega_\alpha^2 m_j + k_{ij})A_j = 0 \tag{14}$$

представляет собой собственный вектор $\vec{A}^{(\alpha)}$ тензора $\hat{k}$, причем вектора, соответствующие разным собственным частотам, взаимно ортогональны

$$\sum_{j=1}^{N} A_j^{(\alpha)} A_j^{(\beta)} = \left\| \vec{A}^{(\alpha)} \right\|^2 \delta_{\alpha\beta}. \tag{15}$$

Нормируя собственные вектора на их норму $\vec{e}^{(\alpha)} = \vec{A}^{(\alpha)} \Big/ \left\| \vec{A}^{(\alpha)} \right\|$, можно записать частное решение системы уравнений (10) в виде

$$\vec{\xi}(t) = C_\alpha \vec{e}^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t} \tag{16}$$

с комплексными, в общем случае, коэффициентами C_α, определяемыми начальными условиями ДС. Общее решение системы (10) дается суперпозицией частных решений вида (16):

$$\xi_j(t) = \sum_\alpha e_j^{(\alpha)} \Theta_\alpha(t), \tag{17}$$

где

$$\Theta_\alpha(t) = \mathrm{Re}\left\{ C_\alpha e^{i\omega_\alpha t} \right\}. \tag{18}$$

Таким образом, каждая из компонент вектора динамических переменных $\vec{\xi}$ линейной автономной системы представляется в виде суммы N периодических колебаний, называемых *нормальными модами*, с собственными частотами системы, определяемыми характеристическим уравнением, и амплитудами и фазами, зависящими от начальных условий.

◆ Нормальные моды удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0, \tag{19}$$

и ортогональны друг другу: временная зависимость отдельной моды Θ_α определяется начальными значениями лишь ее самой и ее скорости. В смысле уравнения (19) нормальные моды можно рассматривать как обобщенные, нормальные, координаты (переменные) ДС. Гамильтониан системы (5), записанный через координаты и импульсы нормальных мод, распадается на N гамильтонианов несвязанных гармонических осцилляторов.

Если характеристическое уравнение имеет кратные корни - *вырожденные* частоты, то решения $\vec{A}^{(\alpha)}$ уравнения (14), соотвествующие вырожденной частоте, могут быть неортогональными, но несложно построить из них взаимно ортогональные линейные комбинации (ортогонализация Шмидта). Каждой вырожденной частоте кратности s соответствует s нормальных мод.

✧ **Пример 1.** Колебания ядер атомов в твердом кристаллическом теле около их положений равновесия описывается системой N взаимодействующих осцилляторов, где N - макроскопически большое число атомов в криталле. После выделения собственных мод и их квантования колебания ядер в кристалле описываются на языке системы невзаимодействующих фононов с различными частотами.

✧ **Пример 2.** Рассмотрим систему двух гармонических осцилляторов с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{x^2 + \Omega^2 y^2}{2} + \beta x y\,. \tag{19}$$

Из уравнений движения

$$\ddot{x} + x + \beta y = 0\,,\ \ \ddot{y} + \Omega^2 y + \beta x = 0 \tag{20}$$

получаем систему алгебраических уравнений для амплитуд в виде:

$$A_x\left(1-\omega^2\right) + \beta A_y = 0\,,\ \ A_y\left(\Omega^2 - \omega^2\right) + \beta A_x = 0\,. \tag{21}$$

Решения характеристического уравнения

$$\omega^4 - \left(1+\Omega^2\right)\omega^2 + \Omega^2 - \beta^2 = 0\,, \tag{22}$$

имеют вид:

$$\omega_{1,2}^2 = 1 + \beta\left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 1}\right), \tag{23}$$

где приведенная расстройка $\Delta = \dfrac{\Omega^2 - 1}{2\beta}$. Зависимость частот от приведенной расстройки показана на графике V13.1. График такого типа называют также графиком Вина – подобное «расталкивание» ветвей нормальных мод характерно для любых взаимодействующих колебательных процессов вблизи области совпадения их собственных частот.

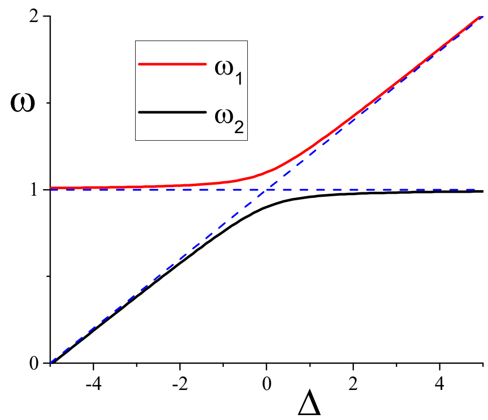

Рис. V13.1
Зависимость частот нормальных мод двух взаимодействующих гармонических осцилляторов от приведенной расстройки Δ. Пунктиром показаны собственные частоты осцилляторов, параметр $\beta = 0.1$.

Амплитуды колебаний осцилляторов на частоте каждой нормальной моды связаны соотношением

$$\frac{A_y^{(1,2)}}{A_x^{(1,2)}} = f_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}^2 - 1}{\beta} = \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 1}\,, \qquad (24)$$

которое можно получить из любого из уравнений (21).

В случае совпадения собственных частот осцилляторов $\Omega = 1$ и слабой связи $\beta \ll 1$ $\omega_{1,2} \approx 1 \pm \beta/2$: колебания представляют собой биения с основной частотой $\omega = 1$ и модулирующей частотой β.

§ 03 *Маятник Фуко*

◆ В качестве еще одного примера рассмотрим маятник Фуко. Как известно, плоскость колебаний математического маятника, подвешенного на поверхности Земли и совершающего малые колебания, медленно вращается и за сутки поворачивается на угол, зависящий от географической широты. Это связано с тем, что мы рассматриваем колебания маятника в неинерциальной системе отсчета и на него действует сила Кориолиса $F = 2m\left[\dot{\vec{r}}\vec{\Omega}\right]$, где $\vec{\Omega}$ - вектор угловой скорости вращения Земли. В частности, плоскость колебаний маятника, подвешенного на полюсе, неизменна в инерциальной системе отсчета, а в системе отсчета, связанной с Землей, за сутки повернется на 2π.

◆ Уравнения движения маятника Фуко в двух направлениях имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 2\Omega_\varphi \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= -2\Omega_\varphi \dot{x} \end{aligned} \qquad (25)$$

где ω_0 - собственная частота колебаний маятника, а $\Omega_\varphi = 2\pi \sin\varphi / T$ - частота, зависящая от широты φ и периода обращения Земли вокруг своей оси T. Можно показать, что уравнения (25) описывают движение системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x + \Omega_\varphi y\right)^2 + \frac{1}{2}\left(p_y - \Omega_\varphi x\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\left(x^2 + y^2\right). \qquad (26)$$

Хотя форма этого гамильтониана несколько сложнее, чем классический вид (5) – кинетическая энергия зависит не только от импульсов, но и от координат (как для заряженной частицы в постоянном магнитном поле), однако это не мешает применить развитую выше схему решения уравнений. Из уравнений (25) получаем систему алгебраических уравнений

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A_x = 2i\Omega_\varphi \omega A_y;\ \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A_y = -2i\Omega_\varphi \omega A_x. \qquad (27)$$

Решения характеристического уравнения $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 = 4\Omega_\varphi^2\omega^2$ имеют вид

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_\varphi^2} \pm \Omega_\varphi\,. \qquad (28)$$

Подставляя их в одно из уравнений (27), получаем собственные вектора, соответствующие этим частотам колебаний:

$$\vec{A}^{(1,2)} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Легко видеть, что собственные моды имеют вид движения по окружности в противоположных направлениях с частотами (28), различающимися на величину $2\Omega_\varphi$. Колебания в одной плоскости можно представить как суперпозицию этих двух вращений.

Колебания маятника Фуко допускают оптическую аналогию. В свободном пространстве поляризацию света можно описывать как в базисе линейных взаимно-ортогональных поляризаций, так и в базисе правой и левой круговых поляризаций. Аналогично можно описать распространение света в волноводе, сохраняющем поляризацию. Однако если этот волновод механически закрутить вдоль его волокна, плоскость линейной поляризации в нем будет постепенно поворачиваться, а правая и левая поляризации будут иметь немного разные периоды.

Так как $\omega_0 \gg \Omega_\varphi$, колебания маятника и в x, и в y плоскости имеют вид колебаний с его собственной частотой, испытывающих биения на частоте $2\Omega_\varphi$. Из-за этих биений плоскость колебаний будет постепенно поворачиваться:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = x_0 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + \Omega_\varphi^2}\, t\right) \begin{pmatrix} \cos\Omega_\varphi t \\ -\sin\Omega_\varphi t \end{pmatrix}. \tag{30}$$

За сутки она повернется на угол $\psi = \Omega_\varphi T = 2\pi \sin\varphi$, то есть угол поворота плоскости колебаний определяется географической широтой места, в котором установлен маятник.

◆ Вращение плоскости колебаний маятника связано с дополнительным набегом фазы $\Omega_\varphi t$, который в неинерциальной системе отсчета связан с действием силы Кориолиса. А в инерциальной системе отсчета маятник Фуко представляет собой математический маятник, колеблющийся под действием силы, направление которой медленно меняется. Адиабатически медленное изменение параметров системы не приводит к изменению характера движения, но приводит к возникновению так называемой ***геометрической фазы***, величина которой напрямую связана с телесным углом, который описывает конец вектора силы. При этом, вообще говоря, неважно, по какому закону он меняется – он может изменяться и не равномерно, как в нашем случае, важна лишь форма замкнутой траектории, которую он описывает.

Геометрическая фаза возникает в различных физических ситуациях и имеет различные названия. Наиболее общее описание геометрической фазы, возникающей в различных квантовых системах, было сделано Берри [B84], поэтому часто ее называют фазой Берри, а в приложении к маятнику Фуко ее обычно называют углом Ханни [H85].

[B84] Berry M.V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. Proc. R. Soc. Lond., 1984, v. A392, p. 45-57.
[H85] Hannay J.H. Angle variable holonomy in adiabatic excursion of an integrable Hamiltonian. J. of Physics A: Mathematical and General, 1985, v. 18, № 2, p. 221-230.

◆ Собственные моды маятника Фуко, представляющие собой движение по окружности, наводят на мысль, что систему уравнений движения полезно рассмотреть в полярной системе координат. Делая в системе уравнений (25) замену

$$x = \rho\cos\theta;\ y = \rho\sin\theta, \qquad (31)$$

можно получить уравнения:

$$\begin{aligned} &\ddot{\rho} - \rho\left(\dot{\theta}^2 + 2\Omega_\varphi\dot{\theta}\right) + \omega^2\rho = 0 \\ &\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\left(\dot{\theta} + \Omega_\varphi\right) = 0 \end{aligned}. \qquad (32)$$

Второе из уравнений можно домножить на ρ и проинтегрировать:

$$\rho^2\left(\dot{\theta} + \Omega_\varphi\right) = \mathrm{const} = M\ . \qquad (33)$$

В этом выражении несложно узнать закон сохранения полного момента импульса, учитывающего как круговое движение маятника, так и вращение Земли. Если возбуждать колебания маятника с нулевым моментом импульса, то согласно (33) угол плоскости колебаний будет изменяться по закону $\dot{\theta} = -\Omega_\varphi$.

Выражая из (33) $\dot{\theta}$ и подставляя в первое уравнение (32), получаем уравнение для радиуса ρ:

$$\ddot{\rho} - \frac{M^2}{\rho^3} + \left(\omega_0^2 + \Omega_\varphi^2\right)\rho = 0\ . \qquad (34)$$

Это уравнение описывает одномерный нелинейный осциллятор, который также можно проинтегрировать:

$$\frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{M^2}{2\rho^2} + \left(\omega_0^2 + \Omega_\varphi^2\right)\frac{\rho^2}{2} = \mathrm{const} = E\ . \qquad (35)$$

Таким образом, исходная система (25) имеет два интеграла движения, что позволяет (аналогично описанию движения в центральном поле) разделить переменные и по-отдельности описать изменения полярного угла (33) и радиуса (35). Из последнего уравнения можно найти период колебаний – вычисляя интеграл

$$T = 2\int\limits_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho}{\sqrt{2E - M^2/\rho^2 - \left(\omega_0^2 + \Omega_\varphi^2\right)\rho^2}}, \tag{36}$$

где $\rho_{\min,\max}$ – точки, в которых знаменатель обращается в ноль, можно показать, что он, как и для обычного гармонического осциллятора, не зависит от энергии и всегда равен $T = 2\pi\Big/\sqrt{\omega_0^2 + \Omega_\varphi^2}$.

☯