

V12 ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Отдельный класс задач о квазипериодическом движении двумерных неавтономных систем с возмущением, гармонически зависящем от времени, связан с моделью параметрически модулированного линейного осциллятора. При слабом возмущении движение этой модели часто оказывается квазипериодическим двухчастотным – одна из частот совпадает с частотой внешнего воздействия, а другая близка к частоте движения невозмущенной системы. Однако в некоторых областях параметров вторая частота движения становится мнимой – решение из квазипериодического превращается в гармоническое с амплитудой, растущей по экспоненциальному закону. Это явление называется *параметрическим резонансом*. Выделение областей параметрического резонанса составляет основную задачу теории.

§ 01 Параметрически модулированный линейный осциллятор

◆ Стандартной моделью для рассмотрения колебаний в параметрических системах является *параметрически модулированный линейный осциллятор* – гармонический осциллятор, квадрат частоты которого изменяется со временем по гармоническому закону. Эта система с уравнением движения

$$\ddot{x} + [1 + \varepsilon \cos \omega t]x = 0 \quad (1)$$

характеризуется двумя безразмерными параметрами – *глубиной модуляции параметра* ε и *частотой модуляции* ω .

❖ В математике уравнение (1) называется уравнением Маттье (**Mathieu equation**), а его решения – функциями Маттье; они детально изучены и табулированы.

◆ Пусть $\varepsilon \ll 1$. Рассмотрим закон движения системы (1) с помощью теории возмущений. Перепишем уравнение (1) в виде

$$x + \Omega^2 x = (\Omega^2 - 1)x - \varepsilon x \cos \omega t \quad (2)$$

где Ω – частота, подлежащая определению. В нулевом приближении будем считать движение гармоническим колебанием с частотой Ω и единичной амплитудой (поскольку уравнение (1) линейно, амплитуде можно придать желаемое значение выбором единиц измерения):

$$x_0 = \cos \Omega t. \quad (3)$$

Значение Ω определится условием отсутствия в правой части возмущающих членов на частоте Ω – это метод исключения резонанса, ранее применявшийся нами в §5.03. Подставляя в правую часть (2) решение нулевого приближения (3), получаем в первом приближении $\Omega = 1$ и

$$x_1 = \cos t + \frac{\varepsilon}{2\omega(\omega + 2)} \cos(\omega + 1)t + \frac{\varepsilon}{2\omega(\omega - 2)} \cos(\omega - 1)t \quad (4)$$

Во втором приближении решение принимает вид

$$x_2 = \cos \Omega t + \frac{\varepsilon}{2\omega(\omega+2)} \cos(\omega+\Omega)t + \frac{\varepsilon}{2\omega(\omega-2)} \cos(\omega-\Omega)t + \\ + \frac{\varepsilon^2}{16\omega^2} \left\{ \frac{\cos(2\omega+\Omega)t}{(\omega+2\Omega)(\omega+\Omega)} + \frac{\cos(2\omega-\Omega)t}{(\omega-2\Omega)(\omega-\Omega)} \right\}, \quad (5)$$

где частота Ω определяется соотношением

$$\Omega^2 = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2(\omega^2 - 4)}. \quad (6)$$

Для того, чтобы получаемые при последовательных итерациях поправки были малы, необходимо выполнение условий

$$\varepsilon \ll |\omega - 2|, \varepsilon \ll |\omega - 1|. \quad (7)$$

При этих условиях движение параметрически модулированного линейного осциллятора является квазипериодическим, причем одна из частот равна частоте ω модуляции параметра, а вторая, Ω , близка к частоте колебаний невозмущенного осциллятора, но отличается от нее слагаемым, которое растет с ростом глубины модуляции параметра.

◆ Движение параметрически модулированного линейного осциллятора при частоте модуляции, близкой к удвоенной собственной частоте осциллятора, - в области, где нарушено первое из неравенств (7) - можно описать с помощью метода медленно меняющихся амплитуд. Представим решение в виде

$$x(t) = a(t) \cos \frac{\omega}{2} t + b(t) \sin \frac{\omega}{2} t \quad (8)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ - медленно меняющиеся амплитуды. Подставляя решение (8) в (1) и приравнивая коэффициенты при $\cos(\omega t/2)$ и $\sin(\omega t/2)$, получаем уравнения

$$\omega \dot{a} + b \left(\frac{\omega^2}{4} - 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0 \quad (9)$$

$$\omega \dot{b} - a \left(\frac{\omega^2}{4} - 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0 \quad (10)$$

Решения этой системы уравнений имеют вид

$$a(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 e^{-\lambda t}, \quad b(t) = B_1 e^{\lambda t} + B_2 e^{-\lambda t}, \quad (11)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - \left(\frac{\omega^2}{4} - 1\right)^2} \quad (12)$$

Введем расстройку частоты модуляции от удвоенной частоты резонанса $\Delta = \omega - 2$. Если $|\Delta| \ll 1$, то выражение (12) можно переписать в виде

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - \Delta^2} \quad (13)$$

Если расстройка по абсолютной величине меньше половины параметра модуляции, то медленно меняющиеся амплитуды $a(t)$ и $b(t)$ в общем случае экспоненциально увеличиваются со временем. Экспоненциальный рост амплитуды колебаний в линейных системах с периодической модуляцией параметров называется **параметрическим резонансом**. Остановить этот рост могла бы нелинейность, но в нашей модели (1) мы ее не учитываем.

Границы области параметрического резонанса вблизи удвоенной частоты невозмущенного движения – главного параметрического резонанса – определяются соотношением

$$\Delta = \pm \frac{\varepsilon}{2} \quad (14)$$

Ширина области главного параметрического резонанса пропорциональна глубине модуляции.

§ 02 Теорема Флоке

◆ При $\Delta > \varepsilon/2$ характеристический показатель λ – чисто мнимый, и движение (8) может быть описано как квазипериодическое с фундаментальными частотами $\omega/2$ и λ . Частота основной гармоники $\Omega = \omega/2 + |\lambda|$. При $\Delta \gg \varepsilon/2$ (ср. неравенства (7)) приближенно $\Omega \approx 1 + \varepsilon^2/16\Delta$, что согласуется с результатом теории возмущений (6).

Отметим, что как внутри, так и вне области параметрического резонанса решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$x(t) = \Phi_1(t)e^{\lambda_1 t} + \Phi_2(t)e^{\lambda_2 t}, \quad (15)$$

где функции $\Phi_k(t)$ – периодические с периодом $2\pi/\omega$, а характеристические показатели λ_k вне зоны устойчивости – чисто мнимые ($\lambda_k = -\lambda_k^*$), а внутри – чисто действительные ($\lambda_k = \lambda_k^*$).

Этот результат есть частный случай **теоремы Флоке** (G.Floquet, 1883). Ее аналог в трехмерном пространстве называют **теоремой Блоха**. Согласно этой теореме система N уравнений

$$\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^N w_{ij}^2(t) x_j = 0, \quad (16)$$

$(1 \leq i \leq N)$, коэффициенты которой w_{ij} суть периодические функции времени с периодом T , имеет $2N$ линейно независимых решений вида $x_i^{(k)} = \Phi_i^{(k)}(t)e^{\lambda_k t}$, где функции $\Phi_i^{(k)}(t)$ – также периодические с периодом T .

◆ Приведем доказательство теоремы для случая одного уравнения второго порядка с периодическим коэффициентом

$$\ddot{x} + w^2(t)x = 0, \quad (17)$$

которое называют уравнением Хилла. Рассмотрим два линейно независимых решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ этого уравнения. В силу периодичности коэффициента $w^2(t)$ функции $x_k(t+T)$ также являются решениями уравнения (17) и могут быть представлены в виде суперпозиции решений $x_k(t)$:

$$\begin{aligned} x_1(t+T) &= \mu_1 x_1(t) + \nu_1 x_2(t) \\ x_2(t+T) &= \nu_2 x_1(t) + \mu_2 x_2(t), \end{aligned} \quad (18)$$

Выбирая первоначальные решения так, что $\nu_k = 0$, получаем

$$x_k(t+T) = \mu_k x_k(t), \quad (19)$$

Далее, для двух линейно независимых решений уравнений (17) справедливо тождество

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt} (\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) \equiv 0, \quad (20)$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) x_2(t) - \dot{x}_2(t) x_1(t) &= \\ = \dot{x}_1(t+T) x_2(t+T) - \dot{x}_2(t+T) x_1(t+T) &= \text{const} \end{aligned} \quad (21)$$

С учетом (19) отсюда получаем $\mu_1 \mu_2 = 1$. Вводя новые постоянные $\mu_k = e^{\lambda_k T}$, получаем $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$ и $x_{1,2}(t) = \Phi_{1,2}(t)e^{\pm \lambda t}$, что завершает доказательство теоремы.

◆ Для уравнения Хилла (17) с действительным коэффициентом $w^2(t)$ решениями являются как функции $x_k(t)$, так и комплексно сопряженные им функции $x_k^*(t)$, откуда следует, что пара коэффициентов μ_1^* , μ_2^* совпадает с парой μ_1 , μ_2 . Это эквивалентно утверждению, что характеристический показатель λ либо чисто действительный, либо чисто мнимый, а на границе области устойчивости параметрического резонанса обращается в нуль.

§ 03 Уточнение границ первой зоны и вторая зона параметрического резонанса

◆ Для уточнения границ зоны устойчивости параметрического резонанса необходимо учесть следующие гармоники в решении (8) – обратиться к представлению решения с большим числом мод (см. §9.01). Если интересоваться только границами зоны устойчивости, достаточно искать решение в виде суммы тригонометрических функций с постоянными коэффициентами:

$$x(t) = a_1 \cos \frac{\omega}{2} t + b_1 \sin \frac{\omega}{2} t + a_2 \cos \frac{3\omega}{2} t + b_2 \sin \frac{3\omega}{2} t, \quad (22)$$

Подставляя (22) в (1) и приравнивая нулю коэффициенты при каждом из косинусов или синусов, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\omega^2}{4}\right)a_1 + \frac{\varepsilon}{2}(a_1 + a_2) &= 0; & \left(1 - \frac{9\omega^2}{4}\right)a_2 + \frac{\varepsilon}{2}a_1 &= 0 \\ \left(1 - \frac{\omega^2}{4}\right)b_1 - \frac{\varepsilon}{2}(b_1 - b_2) &= 0; & \left(1 - \frac{9\omega^2}{4}\right)b_2 + \frac{\varepsilon}{2}b_1 &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Решая ее, получаем уточненные границы зоны устойчивости:

$$\Delta_{2\pm} = \pm \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32}, \quad (24)$$

Параметрический резонанс существует в области $\Delta_{2-} < \omega - 2 < \Delta_{2+}$.

◆ Рассмотрим теперь область частот $\omega \approx 1$, в которой нарушается второе из неравенств (7). Для нахождения границ зоны устойчивости параметрического резонанса в области $|\Delta| = |\omega - 1| \ll 1$ необходимо искать решение в виде

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t, \quad (25)$$

Подставляя (25) в (1) и приравнивая нулю коэффициент при каждой тригонометрической функции, получаем

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{\varepsilon}{2}a_1 &= 0 \\ \left(1 - \omega^2\right)a_1 + \frac{\varepsilon}{2}(2a_0 + a_2) &= 0; & \left(1 - \omega^2\right)b_1 + \frac{\varepsilon}{2}b_2 &= 0 \\ \left(1 - 4\omega^2\right)a_2 + \frac{\varepsilon}{2}a_1 &= 0; & \left(1 - 4\omega^2\right)b_2 + \frac{\varepsilon}{2}b_1 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Решая ее, получаем для зоны параметрического резонанса вблизи единичной частоты следующие значения граничных расстроек:

$$\Delta_{1-} = -\frac{5}{24}\varepsilon^2; \Delta_{1+} = \frac{1}{24}\varepsilon^2, \quad (27)$$

◆ Найденные выше границы зон устойчивости параметрического резонанса относятся к консервативной модели параметрически модулированного гармонического осциллятора. Рассмотрим теперь влияние затухания на границы зон параметрического резонанса. Для модели с уравнением движения

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + [1 + \varepsilon \cos \omega t]x = 0, \quad (28)$$

будем искать решение в виде

$$x(t) = a(t) \cos \frac{\omega}{2} t + b(t) \sin \frac{\omega}{2} t, \quad (29)$$

При этом затухание будем считать малым $\gamma \ll 1; \omega$. Подставляя выражение (29) в уравнение (28), приравнивая коэффициенты при $\cos(\omega t/2)$ и $\sin(\omega t/2)$ и пре-небрегая членами вида $\gamma \dot{a}$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \omega \dot{a} + b \left(\frac{\omega^2}{4} - 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) + \gamma \omega a &= 0 \\ \omega \dot{b} - a \left(\frac{\omega^2}{4} - 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \gamma \omega b &= 0 \end{aligned}, \quad (30)$$

Отсюда находим значение показателя

$$\lambda = -\gamma + \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - \left(\frac{\omega^2}{4} - 1\right)^2}. \quad (31)$$

Приравнивая значение показателя нулю, находим положение границ зоны па-раметрического резонанса

$$\Delta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 - 16\gamma^2}. \quad (32)$$

Для гармонического осциллятора с затуханием возникновение параметрического резонанса при $\omega \approx 2$ возможно, только если глубина модуляции превос-ходит пороговое значение $\varepsilon > \varepsilon_{2c} = 4\gamma$.

◆ Для учета влияния затухания на границы второй зоны параметрического ре-зонанса необходимо, как и в предыдущем пункте, записать уравнения для мед-ленно меняющихся амплитуд, входящих в решение (25). Подставляя (25) в (28) и приравнивая коэффициенты при каждой из тригонометрических функций, получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{\varepsilon}{2} a_1 &= 0 \\ (1 - \omega^2) a_1 + \frac{\varepsilon}{2} a_2 + \varepsilon a_0 + 2\omega\gamma b_1 + 2\omega \dot{b}_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-\omega^2)b_1 + \frac{\varepsilon}{2}b_2 - 2\omega\gamma a_1 - 2\omega\dot{a}_1 &= 0 \\ (1-4\omega^2)a_2 + \frac{\varepsilon}{2}a_1 + 4\omega\gamma b_2 + 4\omega\dot{b}_2 &= 0 \\ (1-4\omega^2)b_2 + \frac{\varepsilon}{2}b_1 - 4\omega\gamma a_2 - 4\omega\dot{a}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Для характеристических показателей λ из этой системы получаем алгебраическое уравнение

$$\begin{aligned} 64\omega^4(\lambda + \gamma)^4 + 4\omega^2(\lambda + \gamma)^2 \left\{ \left(4\omega^2 - 1\right)^2 + 4\left(\omega^2 - 1\right)^2 + \varepsilon^2(2\omega^2 - 1) \right\} + \\ + \left(4\omega^2 - 1\right)^2 \left(\omega^2 - 1\right)^2 + \varepsilon^2(4\omega^2 - 1)(2\omega^2 - 1)(\omega^2 - 1) - \frac{\varepsilon^4}{16}(8\omega^2 - 3) = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Граница зоны параметрического резонанса определяется условием $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, т.е. $\operatorname{Re}(\lambda + \gamma) = \gamma$. Однако при $\gamma > 0$ любые корни этого уравнения с $\operatorname{Re}(\lambda + \gamma) > 0$ вещественны, так как при $\gamma = 0$ система (33) переходит в систему (26), определяющую границы зоны параметрического резонанса для осциллятора без затухания. Это позволяет искать границы зоны параметрического резонанса, подставляя в (34) $\lambda = 0$. Тогда в первом приближении по ε и γ получаем:

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{12} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{64} - \frac{\gamma^2}{9}} \quad (35)$$

Для гармонического осциллятора с затуханием возникновение параметрического резонанса при $\omega \approx 1$ возможно, только если глубина модуляции превосходит пороговое значение $\varepsilon > \varepsilon_{1c} = \sqrt{8\gamma/3}$. При малых значениях γ $\varepsilon_{1c} \gg \varepsilon_{2c}$ - условия возбуждения параметрического резонанса на единичной частоте существенно более жесткие.

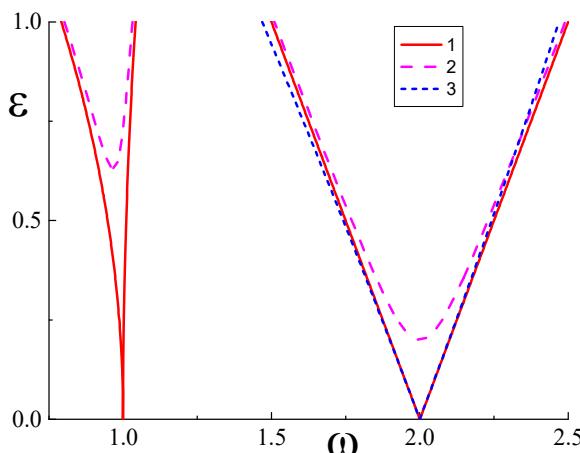


Рис. V12.1.

Границы первой и второй областей параметрического резонанса в первом приближении для консервативного гармонического осциллятора (1) и гармонического осциллятора с затуханием $\gamma = 0.05$ (2). Граница первой области во втором приближении (3).

◆ Как было отмечено выше, экспоненциальный рост амплитуды колебаний в параметрическом резонансе может быть ограничен нелинейностью системы. Частота движения нелинейного осциллятора зависит от его амплитуды (см. §5.03), поэтому по мере роста амплитуды колебаний система может выйти из области параметрического резонанса.

◆◆ *Линейный осциллятор с квадратом частоты, изменяющимся по гармоническому закону, всегда совершает «формально квазипериодическое» двухчастотное движение, одна из частот которого равна частоте модуляции, $\Omega_1 = \omega$, а вторая, Ω_2 , может быть как действительной, так и мнимой.*

Если частота модуляции ω (и ее гармоники $k\omega$) далека от удвоенной частоты движения невозмущенной системы 2Ω , то система совершает квазипериодическое движение, вторая частота движения которого $\Omega_2 \approx \Omega$ и слабо зависит от глубины модуляции ε (6). Движение системы эффективно описывается суперпозицией нескольких периодических движений (8 и 22).

Если частота модуляции ω (или ее гармоника $k\omega$) близка к удвоенной частоте движения невозмущенной системы 2Ω , то движение системы эффективно описывается моделью медленно (экспоненциально) модулированного гармонического движения (11).

Граница между этими двумя случаями определяется шириной параметрического резонанса по частоте (24, 27), которая растет с глубиной модуляции; для главного параметрического резонанса ($\omega \approx 2\Omega$) $\Delta\omega \sim \varepsilon$.

§ 04 Маятник Капицы

◆ Отдельного внимания заслуживает описание движения нелинейного осциллятора, параметрически модулированного возмущением с частотой, много большей частоты движения невозмущенной системы. Обычно в этом качестве рассматривают **маятник Капицы** [К51] – математический маятник, точка подвеса которого вибрирует с высокой частотой.

[К51] Капица П.С. Маятник с вибрирующим подвесом. УФН, 1951, т.44, в.1, с.7-20.

◆ Рассмотрим систему, описывающуюся уравнением

$$\ddot{\phi} + (1 + \varepsilon\omega^2 \cos \omega t) \sin \phi = 0, \quad (36)$$

где частота модуляции $\omega \gg 1$. Параметр ε имеет физический смысл отношения амплитуды вибраций точки подвеса a к длине математического маятника L и предполагается малым $\varepsilon = a/L \ll 1$, однако произведение $\varepsilon\omega^2$ не обязательно мало.

Анализ поведения маятника Капицы основан на разделении быстрых и медленных движений (см. §2.05):

$$\phi(t) = \phi_0(t) + A \cos \omega t, \quad (37)$$

где функция $\varphi_0(t)$ описывает медленное движение маятника, не содержащее членов с частотой порядка ω . В масштабе быстрых движений с частотой ω эту функцию можно считать константой. Подставляя (37) в уравнение (36) и приравнивая члены при $\cos \omega t$, получаем амплитуду быстрых колебаний маятника

$$A = \varepsilon \sin \varphi_0. \quad (38)$$

Для описания медленных движений маятника следует снова подставить решение (37) в (36) и усреднить по периоду быстрых колебаний. В результате получаем уравнение для медленной части движения системы $\varphi_0(t)$:

$$\ddot{\varphi}_0 + \sin \varphi_0 + \delta \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = 0, \quad (39)$$

где $\delta = \varepsilon^2 \omega^2 / 2$. Уравнение (39) описывает движение консервативной системы с эффективным потенциалом

$$W(\varphi_0) = -\cos \varphi_0 - \frac{\delta}{2} \cos 2\varphi_0. \quad (40)$$

Возникновение второго члена в потенциале связано с влиянием высокочастотных вибраций. Система (39) всегда имеет неподвижные точки $\varphi_{1,2} = 0; \pi$, а если $\delta > 1$ - еще две неподвижные точки

$$\varphi_{3,4} = \pi \pm \arccos \frac{1}{\delta}. \quad (41)$$

Анализ устойчивости показывает, что пока $\delta < 1$, точка φ_1 является центром, а точка φ_2 - седлом, как и для обычного математического маятника. Однако в точке $\delta = 1$ происходит бифуркация удвоения (см. §3.02): точка $\varphi_2 = \pi$, в которой маятник находится в своем наивысшем состоянии, становится устойчивой, а рядом с нею возникают две новые неустойчивые точки (41).

