V11 СИНХРОНИЗАЦИЯ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В предыдущих параграфах были рассмотрены задачи о воздействии гармонической силы на консервативную систему, совершающую периодические колебания. При этом почти всегда движение оказывалось квазипериодическим двухчастотным - одна из частот совпадает с частотой внешнего возмущения, а другая определяется начальными условиями и (в резонансном случае) амплитудой возмущения.

Другим типом систем, совершающих периодическое движение в отсутствие внешнего поля, являются диссипативные автоколебательные системы с предельным циклом, примеры которых рассмотрены в лекциях V06 и V07. У них появляются качественно иные свойства - если внешняя гармоническая сила достаточно мала, а ее частота ω не совпадает с частотой автоколебаний невозмущенной системы Ω, то естественно ожидать, что система будет совершать квазипериодическое движение с частотами Ω и ω. С другой стороны, при достаточно большой величине силы можно ожидать, что в системе удержится только один - периодический - режим движения с частотой внешней силы ω. Это явление называется ***синхронизацией*** или ***захватыванием частоты*** (**mode locking** или **phase locking**), а такие колебания мы будем называть *синхронными*. С их рассмотрения мы и начнем.

§ 01 Периодическое движение – синхронные колебания

◆ Следуя традиции [MM+88, §5.6; PT84, §16.1], рассмотрим модель, описывающую воздействие гармонической внешней силы на осциллятор Ван дер Поля - систему с уравнением движения

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x}\left(1 - x^2\right) + x = F\cos\omega t \tag{1}$$

(Напомним, что осциллятор Ван дер Поля получается из осциллятора Релея заменой переменных). В отсутствие внешней силы при малых α движение на предельном цикле есть гармоническое колебание с частотой $\Omega \approx 1$ и амплитудой $A = 2$.

$$x_0(t) = 2\cos t \tag{2}$$

◆ Рассмотрим теперь решения уравнения (1), имеющие частоту внешнего поля и описывающие синхронные колебания. Подставляя в уравнение (1) решение в виде

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t, \tag{3}$$

раскладывая левую часть в ряд Фурье и приравнивая коэффициенты при функциях $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, получаем уравнения

$$\begin{aligned} a\left(1-\omega^2\right) - \alpha b\omega\left(1 - \frac{1}{4}A^2\right) &= F \\ b\left(1-\omega^2\right) + \alpha a\omega\left(1 - \frac{1}{4}A^2\right) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

где $A^2 = a^2 + b^2$.

✧ Отметим аналогию формы этих уравнений и соответствующих уравнений для фурье-амплитуд первой гармоники в задаче о нелинейном резонансе осциллятора Дуффинга (V08, уравнения (11) и (12)):

$$\left(1+\frac{3}{4}A^2-\omega^2\right)a+2\gamma\omega b=F,\ \left(1+\frac{3}{4}A^2-\omega^2\right)b-2\gamma\omega a=0$$

где $A^2=a^2+b^2$. Сходство уравнений определяет и сходство методов их решения.

Возводя уравнения (4) в квадрат и складывая, получаем уравнение для квадрата амплитуды первой гармоники вынужденных колебаний A^2

$$\left(1-\frac{1}{4}A^2\right)^2\alpha^2\omega^2A^2+\left(1-\omega^2\right)^2A^2=F^2 \qquad (5)$$

Это кубическое уравнение относительно величины $z=A^2/4$ для упрощения можно переписать в виде

$$\Phi(z)=(z-1)^2z+\tilde{\Delta}z=\tilde{F}, \qquad (6)$$

где $\tilde{\Delta}=\left(\omega^2-1\right)^2/\alpha^2\omega^2$ - эффективная расстройка, а $\tilde{F}=F^2/4\alpha^2\omega^2$ - эффективная величина внешней силы. Отметим, что оба параметра неотрицательны. При условии $\tilde{\Delta}<1/3$ кубическая парабола $\Phi(z)$ немонотонна – она имеет экстремумы в точках:

$$z_{\pm}=\frac{2\pm\sqrt{1-3\tilde{\Delta}}}{3}. \qquad (7)$$

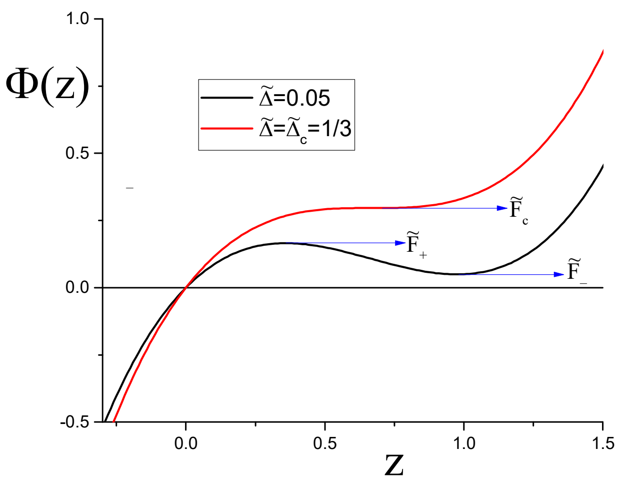

Рис. V11.1
Поведение кубической параболы $\Phi(z)$ (6) при различных значениях расстройки $\tilde{\Delta}$. При малом значении расстройки $\tilde{\Delta}=0.05$ уравнение (6) имеет три корня, если сила находится в диапазоне $\tilde{F}_-<\tilde{F}<\tilde{F}_+$. При критическом значении расстройки $\tilde{\Delta}_c=1/3$ остается лишь один вещественный корень уравнения (6) при любых значениях внешней силы.

Это значит, что если частота внешней силы близка к частоте собственных колебаний

$$1-\frac{\alpha\omega}{\sqrt{3}}<\omega^2<1+\frac{\alpha\omega}{\sqrt{3}}, \qquad (8)$$

уравнение (6) имеет три вещественных (и положительных) корня $z_1 < z_- < z_2 < z_+ < z_3$, если значение силы находится в интервале $\tilde{F}_- < \tilde{F} < \tilde{F}_+$,

$$\tilde{F}_\pm = \Phi\left(z_\mp\right) = \frac{2}{27}\left(1 + 9\tilde{\Delta} \pm \left(1 - 3\tilde{\Delta}\right)^{3/2}\right). \qquad (9)$$

Минимальное значение величины $\tilde{F}_- = 0$ достигается при $\tilde{\Delta} = 0$. Величина $\tilde{F}_+$ принимает максимальное значение $8/27$ на границе частотного интервала (8) $\tilde{\Delta}_c = 1/3$. Это соответствует значениям исходных параметров системы

$$\omega_c^2 = 1 + \frac{\alpha}{6}\left(\alpha \pm \sqrt{12 + \alpha^2}\right) \approx 1 \pm \frac{\alpha}{\sqrt{3}},\ F_c = \sqrt{\frac{32}{27}}\alpha\omega_c \approx 1.09\alpha \qquad (10)$$

Уравнение (6) при этом имеет трехкратный корень $z_c = 2/3$.

Если амплитуда внешней силы превосходит критическое значение F_c, то кубическое уравнение (5) имеет **единственное** решение – внешняя сила навязывает системе движение с амплитудой, возрастающей при приближении к частоте движения невозмущенной системы (см. рис. V11.2). Если амплитуда внешней силы меньше критического значения, в некотором интервале частот в системе возможны периодические (с частотой внешнего воздействия) колебания с **тремя** различными значениями амплитуды. Устойчивость этих решений будет исследована отдельно.

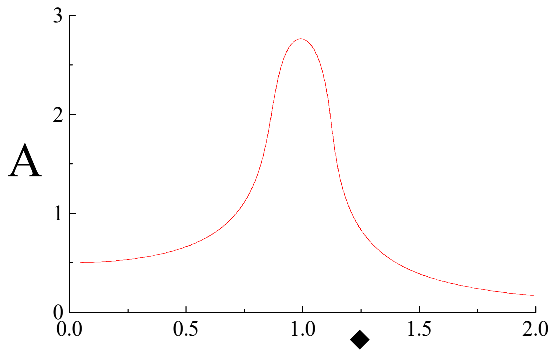

Рис. V11.2
Зависимость амплитуды A синхронных колебаний осциллятора Ван-дер-Поля от частоты ω при значениях параметров $\alpha = 0.2$ и $F = 0.5 = 2.29F_c$.

§ 02 Устойчивость синхронных колебаний

◆ Для исследования устойчивости синхронных колебаний используем метод медленно меняющихся амплитуд. Подставим в (1) решение вида

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \qquad (11)$$

считая, что амплитуды a и b суть медленно меняющиеся функции времени. Пренебрегая вторыми производными по времени от a и b и малыми членами второго порядка типа $\alpha\dot{a}$ и $\alpha\dot{b}$ и собирая коэффициенты при функциях $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2\omega}\left[b\left(1-\omega^2\right)+\alpha a\omega\left(1-\frac{1}{4}A^2\right)\right] \\ \dot{b} &= -\frac{1}{2\omega}\left[a\left(1-\omega^2\right)-\alpha b\omega\left(1-\frac{1}{4}A^2\right)-F\right] \end{aligned} \qquad (12)$$

Найденные в предыдущем параграфе значения $z_{1,2,3} = A^2/4 = \left(a^2+b^2\right)/4$ соответствуют неподвижным точкам этой системы. Для исследования устойчивости этих точек необходимо вычислить собственные значения матрицы устойчивости $\hat{M}$ (см. V04, §01) в этих точках. Для некоторого упрощения выражений выберем в качестве единицы времени величину $T=\left(2\omega\right)^{-1}$. Вычисляя элементы матрицы $\hat{M}$, получим ее след

$$S = \alpha\omega\left(2\frac{A^2}{4}-1\right) \qquad (13)$$

и детерминант

$$D = \left(\omega^2-1\right)^2+\alpha^2\omega^2\left(1-\frac{A^2}{4}\right)\left(1-3\frac{A^2}{4}\right) \qquad (14)$$

Неподвижные точки системы (12) устойчивы, если $S<0$ и $D>0$. Из первого условия сразу получаем $z = A^2/4 > 1/2$. Выражение для детерминанта удобно снова переписать в использованных ранее обозначениях

$$D = \alpha^2\omega^2\left\{\tilde{\Delta}+3\left(z-1\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)\right\}. \qquad (15)$$

Отсюда несложно получить, что детерминант отрицателен в интервале $z_- < z < z_+$, где $z_\pm$ – именно те точки (7), в которых кубическая парабола $\Phi\left(z\right)$ (6) имеет экстремумы (рис. V11.1). Отсюда следует, что средняя из неподвижных точек системы z_2 всегда неустойчива. Точки z_1 и z_3 могут быть устойчивы, если их координаты больше $1/2$.

Зависимости решений уравнения (6) от эффективной расстройки $\tilde{\Delta}$ при различных значениях эффективной силы $\tilde{F}$ показаны на рис. V11.3. Пунктиром также показаны границы областей неустойчивости $S=0$ и $D=0$. Кривые $z\left(\tilde{\Delta}\right)$ могут пересекать границы области неустойчивости один, два или даже три раза.

Рассмотрим сперва верхнюю ветвь зависимости $z\left(\tilde{\Delta}\right)$ – точку z_3. При больших расстройках $\tilde{\Delta} > 1/3$ детерминат D всегда положителен. Поэтому при больших расстройках, когда точка z_3 является единственным корнем уравнения (6), она устойчива, если $z_3 > 1/2$. Из уравнения (6) получаем условие на значения внешней силы, при которой возможна синхронизация:

$$\tilde{F} > \tilde{F}_t = \frac{1}{8}\left(1+4\tilde{\Delta}\right). \qquad (16)$$

В случае малых расстроек $\tilde{\Delta} < 1/3$ верхняя ветвь теряет устойчивость при пересечении кривой $D = 0$ в точке z_+. Значение силы в этой точке равно $\tilde{F}_-\left(\tilde{\Delta}\right)$ (9). Таким образом, при малых расстройках синхронизация возможна, если выполняется условие

$$\tilde{F} > \tilde{F}_- = \frac{2}{27}\left(1+9\tilde{\Delta}-\left(1-3\tilde{\Delta}\right)^{3/2}\right). \qquad (17)$$

При фиксированном значении силы неравенства (16) и (17) определяют ширину центральной полосы устойчивой синхронизации. При $\tilde{\Delta} \ll 1$ она имеет вид $\tilde{\Delta} < \tilde{F}_-$ (или $\left|\omega^2 - 1\right| < F/2$).

> Устойчивые синхронные колебания существуют при любых, сколь угодно малых значениях силы $F \ll \alpha$. Полоса устойчивой синхронизации лежит вблизи резонансной частоты $\omega = 1$. Спектральная ширина этой полосы растет пропорционально величине силы F.

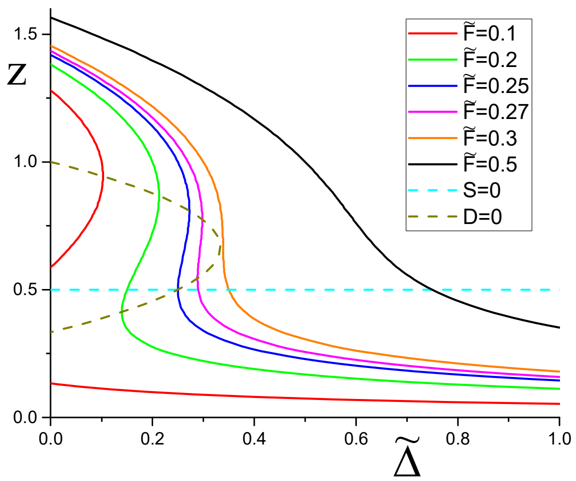

Рис. V11.3
Решения уравнения (6) $z\left(\tilde{\Delta}\right)$ при различных значениях эффективной силы $\tilde{F}$. Штриховыми линиями показаны границы области устойчивости $S = 0$ и $D = 0$.

Теперь рассмотрим нижнюю ветвь зависимости $z\left(\tilde{\Delta}\right)$, существующую при $\tilde{\Delta} < 1/3$. Из условия $z_1 > 1/2$ получаем $\tilde{\Delta} > 1/4$. Таким образом, дополнительная полоса устойчивой синхронизации существует в узком частотном диапазоне $1/4 < \tilde{\Delta} < 1/3$. Величина z_1 при этом лежит в интервале $1/2 < z_1 < z_-$. Подставляя границы этого интервала в уравнение (6), получаем, что такие решения существуют, если величина силы лежит в диапазоне

$$\frac{1}{8}\left(1+4\tilde{\Delta}\right) = \tilde{F}_t < \tilde{F} < \tilde{F}_+ = \frac{2}{27}\left(1+9\tilde{\Delta}+\left(1-3\Delta\right)^{3/2}\right). \qquad (18)$$

На рис. V11.4 показаны границы областей синхронизации, задаваемые неравенствами (16-18). Видно, что дополнительная полоса устойчивых синхронных колебаний рождается **внутри** полученной нами ранее центральной полосы синхронизации.

Осциллятор Ван дер Поля под действием гармонической силы обладает бистабильностью: при значениях силы $F_t \approx \alpha \le F \le F_c \approx 1.09\alpha$ и при частоте внешней силы, лежащей в интервале $\alpha/2 \le \left|\omega^2 - 1\right| \le \alpha/\sqrt{3}$, в системе могут существовать два устойчивых колебания с частотой ω, различающихся амплитудами и фазовыми сдвигами по отношению ко внешней силе.

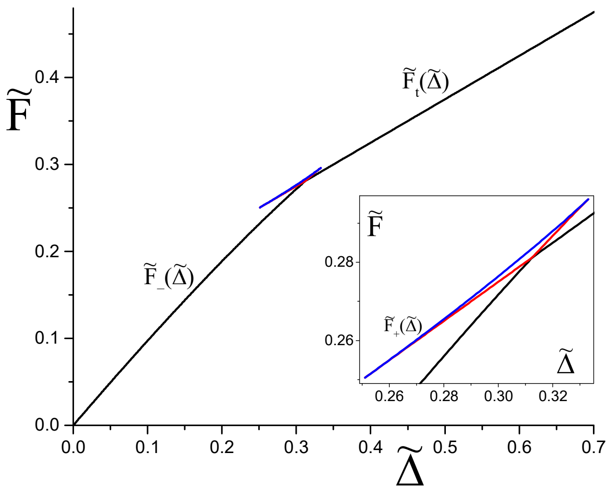

Рис. V11.4
Границы области синхронизации колебаний для осциллятора Ван-дер-Поля на плоскости переменных $\tilde{F} - \tilde{\Delta}$. Синяя линия показывает область бистабильности. В увеличенном виде в приведенных координатах она показана на врезке.

Хотя размеры области бистабильности незначительны, а степень устойчивости синхронных колебаний весьма мала, их наличие представляет принципиальный интерес.

✧ Задача об устойчивости синхронных колебаний для осциллятора Ван дер Поля при малых значениях параметра $\alpha \ll 1$ была решена Андроновым и Виттом еще в 1930 году [AW30, А56]. В своей пионерской работе эти авторы отметили наличие у системы области бистабильности, в которой "*существует одновременно два устойчивых периодических решения*" [А56, с. 64], но отказались от ее рассмотрения. Хотя и сама задача, и предложенный в работе [AW30] метод ее решения, основанный на уравнениях для медленно меняющихся амплитуд, вошли в стандарт учебного курса теории колебаний [РТ84, с.251-258; ММ+88, с. 214-219], утверждение о бистабильности синхронных колебаний осталось без внимания и со временем было забыто настолько, что стало отрицаться [Л80, с.75-76].

[AW30] Andronow A., Witt A. "Zur Theorie des Mintnehmens von van der Pol." Archiv für Electrotechnik, 1930, Bd. XXIV, S. 99-110
[А56] Андронов А.А. Собрание трудов. - Изд.-во АН СССР, 1956. - 538 с.
[Л80] Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. - 360 с.

§ 03 Квазипериодические движения

◆ Обратимся теперь к рассмотрению квазипериодических движений в осцилляторе Ван дер Поля под воздействием гармонической внешней силы (1). В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением томсоновского случая $\alpha \ll 1$, при котором в отсутствие внешней силы движение осциллятора хорошо описывается моделью гармонического колебания с частотой $\Omega \approx 1$ и амплитудой $A = 2$: $x_0(t) = 2\cos t$ (2).

◆ Рассмотрим квазипериодическое движение вблизи границы полосы синхронизации при условии $F \ll \alpha$, когда расстройка немного **превышает** граничную расстройку полосы синхронизации (17)

$$|\Delta| = \frac{\left|\omega^2 - 1\right|}{2} > \Delta_c = \frac{F}{4}, \tag{19}$$

то есть тоже удовлетворяет условию $\Delta \ll \alpha \ll 1$. Ограничимся рассмотрением случая $\Delta > 0$ (рассмотрение противоположного случая требует минимальных изменений). Для описания движения используем метод медленно меняющихся амплитуд. Представим решение как модулированное колебание с частотой внешней силы, вводя с помощью переменных амплитуды A и фазы φ решение

$$x = A\cos(\omega t - \varphi). \tag{20}$$

Подставляя это выражение в уравнение движения (1) и пренебрегая членами второго порядка малости $\left(\ddot{A}, \dot{A}\dot{\varphi}, A\ddot{\varphi}, A\dot{\varphi}^2, \alpha\dot{A}, \alpha A\dot{\varphi}\right)$, после простых, но громоздких преобразований получаем уравнения для амплитуды и фазы

$$\dot{A} = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{A^2}{4}\right)A + \frac{F}{2}\sin\varphi. \tag{22}$$

$$\dot{\varphi} = \Delta + \frac{F}{2A}\cos\varphi \tag{23}$$

В силу неравенства $F \ll \alpha$ в уравнении (22) можно пренебречь вторым членом, и в низшем приближении принять амплитуду колебаний равной амплитуде невозмущенных автоколебаний:

$$A = A_0 = 2. \tag{24}$$

Уравнение (23) может быть элементарно проинтегрировано:

$$\varphi(t) = 2\operatorname{arctg}\left\{\sqrt{\frac{\Delta + \Delta_c}{\Delta - \Delta_c}}\operatorname{tg}\left[\frac{\sqrt{\Delta^2 - \Delta_c^2}}{2}\left(t - t_0\right)\right]\right\} \tag{25}$$

Скорость изменения фазы дается выражением

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\Delta^2 - \Delta_c^2}{\Delta - \Delta_c\cos\left(\sqrt{\Delta^2 - \Delta_c^2}\left(t - t_0\right)\right)} \tag{26}$$

Из формулы (26) видно, что фаза монотонно растет, а скорость ее роста изменяется периодически с периодом $T = 2\pi\left(\Delta^2 - \Delta_c^2\right)^{-1/2}$.

◆ Характер квазипериодического движения существенно зависит от параметра

$$\chi = \frac{\Delta}{\Delta_c} - 1 \qquad (27)$$

При малых $\chi \ll 1$, что соответствует близости к границе полосы синхронизации, скорость изменения фазы на большей части периода ее изменения T много меньше граничной расстройки: $\dot{\varphi} \approx \chi\Delta_c$. На коротком временном интервале продолжительности $\Delta t \sim \sqrt{\chi}T$ скорость изменения фазы имеет пик, достигая максимального значения $\max\dot{\varphi} \approx 2\Delta_c$.

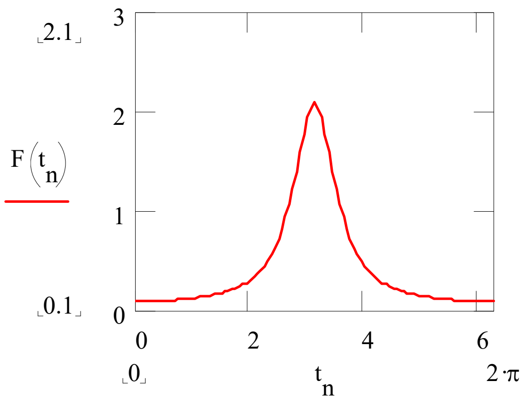

Рис. V11.5
Скорость изменения фазы решения (26) вблизи границы области синхронизации на одном периоде, нормированная на граничную расстройку. Значение параметра $\chi = 0.1$.

Поэтому вблизи границы области синхронизации, при $\chi \ll 1$, квазипериодическое движение системы содержит большое число $N \sim \chi^{-1/2}$ спектральных компонент с частотами $\Omega_k = \omega - k\sqrt{\chi}\Delta_c$, заполняющих всю полосу синхронизации.

◆ При $\chi \gg 1$ скорость изменения фазы можно считать постоянной: $\dot{\varphi} \approx \Delta$. Тогда решение (25) с постоянной амплитудой $A = 2$ описывает просто невозмущенные автоколебания осциллятора с частотой $\Omega = \omega - \Delta = 1$. Для учета влияния внешней силы в этом случае надо уточнить приближение (24). Полагая $A = 2 + \xi$, подставляя это выражение в уравнение (22) и линеаризуя по ξ, получаем

$$\begin{aligned} x(t) &\approx \left[2 + \frac{F}{2\alpha}\sin\Delta t\right]\cos t = \\ &= 2\cos t + \frac{F}{4\alpha}\sin\omega t - \frac{F}{4\alpha}\sin(1-\Delta)t. \end{aligned} \qquad (28)$$

Таким образом, спектр квазипериодического движения осциллятора Ван дер Поля под действием слабой гармонической силы $F \ll \alpha$ при больших расстройках $\Delta \gg \Delta_c$ содержит три компоненты: на частоте невозмущенного движения $\Omega_1 = 1$, на частоте внешней силы $\Omega_2 = \omega$ и на комбинационной частоте $\Omega_3 = 2\Omega_1 - \Omega_2$.

◆ Обратимся теперь к рассмотрению квазипериодического движения вблизи границы полосы синхронизации при противоположном условии $F \gg \alpha$. В этом случае в уравнении движения (1) в первом приближении можно пренебречь членами, пропорциональными α. Тогда осциллятор Ван дер Поля превращается в консервативный гармонический осциллятор, и его вынужденные колебания описываются законом

$$x(t) = \frac{F}{1-\omega^2}\cos\omega t \qquad (29)$$

В следующем приближении представим решение в виде

$$x(t) = \frac{F}{1-\omega^2}\cos\omega t + a\cos t, \qquad (30)$$

где $a(t)$ - медленно меняющаяся амплитуда. Подставляя решение (30) в (1), пренебрегая членами второго порядка малости $(\ddot{a}, \alpha\dot{a})$, умножая уравнение на $\sin t$ и устредняя по периоду, получаем уравнение для амплитуды в виде

$$\dot{a} = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{F^2}{2\left(\omega^2-1\right)^2}\right)a, \qquad (31)$$

откуда для стационарной амплитуды получаем значение

$$a = \sqrt{4 - \frac{F^2}{2\Delta^2}} \qquad (32)$$

При уменьшении расстройки амплитуда уменьшается, обращаясь в ноль при значении

$$\Delta_c = \pm\frac{F}{2\sqrt{2}} \qquad (33)$$

что соответствует найденной ранее (16) границе полосы синхронизации в случае $F \gg \alpha$. Такой тип перехода от квазипериодического движения к периодическому носит название синхронизации гашением. При больших значениях расстройки амплитуда автоколебаний, как и следует, принимает невозмущенное значение $a_0 = 2$.

☯