

V10 КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Выше мы рассматривали задачи о периодических движениях в системах с одной степенью свободы под действием силового периодического возмущения. Рассматривался класс диссипативных систем с затуханием, для которого отсутствие поля единственными аттракторами являлись положения равновесия. Поскольку собственные движения в таких системах затухают, начальные условия влияют лишь на то, какой из нескольких возможных типов периодического движения установится в системе.

Сейчас мы перейдем к рассмотрению более общих типов движения в системах с одной степенью свободы под действием силового периодического возмущения - квазипериодических движений. Начнем с рассмотрения таких движений в консервативных системах. Для них почти при любых начальных условиях движение в отсутствие внешней силы (собственное движение) является периодическим, а его частота Ω определяется начальными условиями. Естественно допустить, что при воздействии на такую систему слабой гармонической силы частоты ω спектр движения системы будет содержать как компоненты невозмущенной частоты и ее гармоник, так и компоненту на частоте возмущения. Ее выделение представляет специальный интерес.

§ 01 Восприимчивость к слабой гармонической силе

◆ Рассмотрим модель, описывающую одномерное движение частицы (массы $\mu = 1$) в поле с потенциалом $U(x)$ под действием слабой гармонической силы. Уравнение движения такой модели имеет вид

$$\ddot{x} + \frac{dU}{dx} = F \cos \omega t. \quad (1)$$

В отсутствие внешней силы невозмущенный закон движения $x_0(t, E)$ почти при всех начальных условиях является периодическим и может быть представлен в виде разложения в ряд Фурье (см. V01)

$$x_0(t, E) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_s \exp(is\Omega t), \quad (2)$$

где фурье-амплитуды X_s и частота движения Ω являются, в общем случае, функциями энергии. Если амплитуда внешней силы F достаточно мала, то можно допустить, что изменение закона движения системы также будет малым. Представим закон возмущенного движения в виде

$$x(t) = x_0(t) + \xi(t). \quad (3)$$

Поправку $\xi(t)$ будем называть *откликом* на гармоническое поле. Подставляя (3) в (1) и линеаризуя получившееся уравнение относительно ξ , приходим к линейному неоднородному уравнению

$$\ddot{\xi} + \frac{d^2U(x_0(t))}{dx^2} \xi = F \cos \omega t, \quad (4)$$

в котором коэффициент U_{xx} является периодической функцией времени. Для определения частного решения системы (4), пропорционального величине силы и изменяющегося с частотой внешнего поля, необходимо отыскать фундаментальную систему решений однородного уравнения, получающегося из (4) при $F = 0$ - два его независимых решения [Э65, с.100; К71, с. 97].

[Э65] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., Наука, 1965. - 424 с.

[К71] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.; Наука, 1971. - 576 с.

В качестве таких решений можно взять функции

$$y_1(t) = \frac{dx_0}{dt}, \quad y_2(t) = \frac{dx_0}{dE}, \quad (5)$$

в чем легко убедиться, продифференцировав уравнение невозмущенного движения

$$\ddot{x}_0 + \frac{dU}{dx} = 0 \quad (6)$$

по времени и по энергии и сравнив полученные выражения с уравнением (4). Независимость решений y_1 и y_2 можно установить, продифференцировав закон сохранения полной энергии невозмущенной системы,

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + U(x) = E, \quad (7)$$

по энергии E . В итоге получается выражение

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dE} + \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dE} = 1 = y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2, \quad (8)$$

представляющее собой вронскиан решений y_1 и y_2 , тождественно равный единице - и потому всегда отличный от нуля.

Интегрируя уравнение (4) методом вариации постоянных [Э65, с.116, К71, с.144] и подставляя в правые части выражений (5) разложение невозмущенного движения в ряд Фурье (2), получим частное решение в виде

$$\xi(t) = \alpha(\omega) F \cos \omega t. \quad (9)$$

Отклик консервативной динамической системы (1) на слабую гармоническую силу представляет собой гармоническое колебание с частотой внешней силы, амплитуда которого пропорциональна величине внешней силы. Коэффициент пропорциональности называется **линейной восприимчивостью** системы (1) в состоянии с заданной энергией E ; он имеет вид

$$\alpha(\omega) = 2\Omega \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d}{dE} \left(\frac{s^2 |X_s|^2 \Omega}{s^2 \Omega^2 - \omega^2} \right). \quad (10)$$

Приведенное выражение для линейной восприимчивости впервые получено в работе [ГПЮ67].

[ГПЮ67] Гапонов А.В., Петелин М.И., Юлпатов В.К. "Индуцированное излучение возбужденных классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике." Изв. вузов - Радиофиз. 1967, т.Х, №9-10, с.1414-53

❖ **Пример 1.** Найдем линейную восприимчивость гармонического осциллятора. Свободное движение в этой модели представляет собой гармоническое колебание (отличны от нуля только фурье-амплитуды $X_1 = X_{-1}^*$), а частота колебаний не зависит от энергии: $\Omega = \text{const}$. Выражение (10) упрощается и принимает вид

$$\alpha(\omega) = \frac{2\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{d}{dE} (|X_1|^2). \quad (11)$$

Поскольку $|X_1|^2 = E/2\Omega^2$, из формулы (11) получаем

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} \quad (12)$$

Линейная восприимчивость гармонического осциллятора не зависит от его энергии. Она положительна на низких частотах ($\omega < \Omega$) и отрицательна на высоких ($\omega > \Omega$). На резонансной частоте $\omega = \Omega$ восприимчивость $\alpha(\omega)$ имеет полюс первого порядка.

❖ **Пример 2.** Найдем линейную восприимчивость частицы в потенциальном ящике - поле с потенциалом

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ \infty, & |x| > a \end{cases} \quad (13)$$

В противоположность предыдущему примеру, у этой системы фурье-амплитуды движения не зависят от энергии (см. V01.10), а частота зависит:

$$\Omega = \frac{\pi}{2a} \sqrt{2E} \quad (14)$$

Выражение (10) в этом случае принимает вид

$$\alpha(\omega) = -2\Omega \frac{d\Omega}{dE} \sum_{s=1}^{\infty} s^2 |X_s|^2 \frac{s^2 \Omega^2 + \omega^2}{(s^2 \Omega^2 - \omega^2)^2} \quad (15)$$

Линейная восприимчивость частицы в потенциальном ящике **отрицательна на всех частотах**. ❖ Этот вывод часто вызывает недоверие, особенно в приложении к постоянному полю: под действием силы $F > 0$, влекущей частицы вправо, - она смещается (в среднем) влево. Тут все правильно: в области $x > 0$, где потенциальная энергия частицы $U = -Fx$ меньше, ее кинетическая энергия, а с нею и скорость больше, чем в области $x < 0$. Следовательно, частица больше времени проводит в области $x < 0$, что и ведет к неравенству $\langle x \rangle < 0$.

На резонансных частотах $\omega = s\Omega$ линейная восприимчивость частицы в потенциальном ящике имеет полюс второго порядка.

◆ Рассмотренные примеры показывают, что для систем общего вида зависимость фурье-амплитуд от частоты ответственна за вклады с полюсами первого порядка, имеющих разные знаки по обе стороны от резонансной частоты, а не-

изохронность (зависимость частоты движения от энергии) ответственна за возникновение вкладов с полюсами второго порядка, имеющих одинаковые знаки по обе стороны от резонансной частоты.

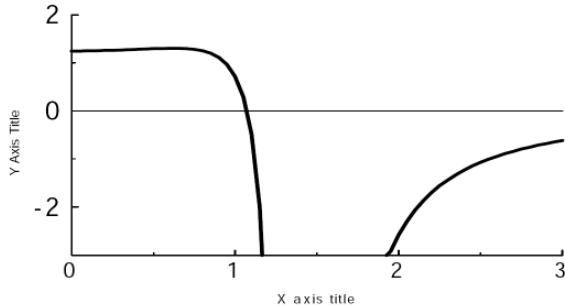


Рис. V10.1

Зависимость от частоты линейной восприимчивости консервативного осциллятора Дуффинга D_{1+} в состоянии с энергией $E = 1$. Частота невозмущенного движения системы $\Omega = 1.381$.

Вблизи резонансов $\omega = s\Omega$ всегда доминируют члены второго типа. Отметим, что при **любой**, сколь угодно малой величине силы F вблизи резонансов существует область частот, в которой основная предпосылка использованного подхода - предположение о малости отклика в сравнении с невозмущенным движением - нарушается. Поведение системы под действием резонансного поля требует отдельного рассмотрения.

§ 02 Консервативный нелинейный резонанс

◆ Рассмотрим движение консервативного осциллятора Дуффинга D_{1+} под действием слабой гармонической силы $F \ll 1$, частота которой близка к собственной частоте малых колебаний, $\omega \approx 1$. Отклонение частоты возмущения от резонанса удобно характеризовать параметром

$$\Delta = \frac{\omega^2 - 1}{2}. \quad (16)$$

При $\omega \approx 1$ $\Delta \approx \omega - 1$, поэтому мы будем называть Δ расстройкой. Решение уравнения движения

$$\ddot{x} + x + x^3 = F \cos \omega t \quad (17)$$

будем искать в виде модулированного гармонического колебания на частоте внешней силы

$$x(t) = q(t) \cos \omega t + p(t) \sin \omega t \quad (18)$$

Функции $q(t)$ и $p(t)$ будем называть медленными амплитудами. Подставляя (18) в (17), пренебрегая членами, содержащими вторые производные (\ddot{q} и \ddot{p}) медленных амплитуд по времени и собирая коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, получаем систему уравнений движения для медленных амплитуд

$$\begin{aligned} q &= -\frac{2\Delta}{\omega} p + \frac{3}{4\omega} (q^2 + p^2) p, \\ p &= \frac{F}{\omega} + \frac{2\Delta}{\omega} q - \frac{3}{4\omega} (q^2 + p^2) q. \end{aligned} \quad (19)$$

В лекции V08 были получены уравнения (32,33) для исследования устойчивости колебаний с различными амплитудами в диссипативном осцилляторе Дуффинга под действием внешней силы. В случае $\gamma=0$ эти уравнения переходят в систему (19). Однако в отсутствие диссипации движение в осцилляторе Дуффинга имеет два важных отличия. Во-первых, верхняя ветвь, соответствующая нелинейному резонансу, будет существовать при любых значениях частоты $\omega > 1$ (см. рис. V10.2).

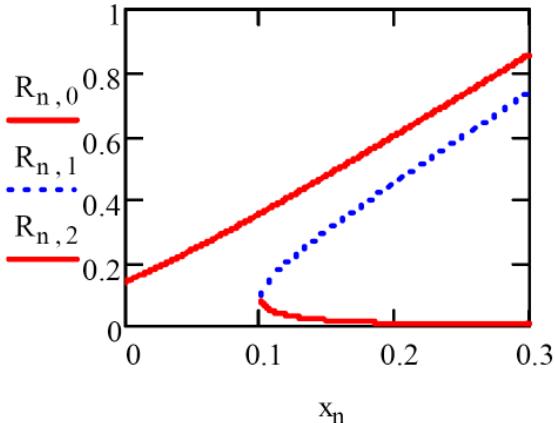


Рис. V10.2

Зависимость амплитуд вынужденных колебаний от расстройки Δ при $F = 0.05$. Сплошные линии – устойчивые ветви, пунктирная линия – неустойчивая ветвь.

Во-вторых, как мы увидим далее, устойчивые неподвижные точки системы (19), соответствующие движению с частотой внешней силы с амплитудами верхней резонансной или нижней нерезонансной ветви, являются центрами. Поэтому помимо движения с частотой внешней силы система будет совершать относительно медленное незатухающее движение, которое описывается автономной системой с одной степенью свободы (19). Можно показать, что эти уравнения образуют систему канонических уравнений для гамильтониана

$$H(p, q) = T(p, q) + V(q), \quad (20)$$

где $T(p, q)$ есть зависящая как от импульса, так и от координаты кинетическая энергия системы,

$$T(p, q) = -\frac{\Delta}{\omega} p^2 \left[1 - \frac{3}{16\Delta} (2q^2 + p^2) \right], \quad (21)$$

а $V(q)$ есть зависящая только от координат потенциальная энергия:

$$V(q) = -\frac{F}{\omega} q - \frac{\Delta}{\omega} q^2 + \frac{3}{16\omega} q^4. \quad (22)$$

Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением области малых расстроек, в дальнейшем в выражениях (19-22) будем заменять ω на 1.

◆ Неподвижные точки системы (19), соответствующие периодическим движениям системы с частотой, равной частоте внешней силы, лежат на линии $p=0$ в точках, где потенциал $V(q)$ имеет экстремум. Последние определяются корнями кубического уравнения

$$q^3 - \frac{8}{3} \Delta q - \frac{4}{3} F = 0, \quad (22)$$

совпадающее с (V08.13) при $\gamma = 0$. Это уравнение всегда имеет по крайней мере один вещественный корень. Наличие дополнительных вещественных корней зависит от знака дискриминанта кубического уравнения (ср. V09.38), который равен

$$D(\Delta, F) = -\left(\frac{8}{9}\Delta\right)^3 + \frac{4}{9}F^2. \quad (23)$$

Таким образом, при заданной величине внешней силы F и (положительной) расстройке, превосходящей значение

$$\Delta_c = \left(\frac{81}{128}\right)^{1/3} F^{2/3} = 0.858 F^{2/3} \quad (24)$$

потенциал $V(q)$ имеет три точки экстремума, а система (19) - три неподвижных точки.

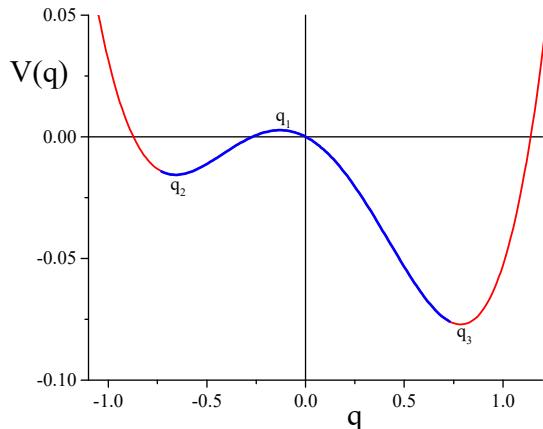


Рис. V10.3

Вид эффективного потенциала $V(q)$ для консервативного осциллятора Дуффинга D_{1+} под действием гармонической силы величины $F = 0.05$ при расстройке $\Delta = 0.2 = 1.72\Delta_c$. Синим цветом выделена область, где эффективная масса отрицательна.

◆ Определим типы этих неподвижных точек. Для консервативных систем (а система (19), как автономная гамильтонова, относится к таковым) возможны неподвижные точки двух типов - центры и седла. При малых p кинетическая энергия $T(q, p)$ (21) имеет вид кинетической энергии частицы **знакопеременной** массы

$$m(q) \sim \left[q^2 - \frac{8}{3}\Delta \right]^{-1}, \quad (25)$$

Пусть $\Delta \gg F$. Тогда корни кубического уравнения (21) приближенно равны (в порядке увеличения их абсолютного значения):

$$q_1 \approx -\frac{F}{2\Delta}, \quad q_2 \approx -\sqrt{\frac{8}{3}\Delta + \frac{F}{4\Delta}}, \quad q_3 \approx \sqrt{\frac{8}{3}\Delta + \frac{F}{4\Delta}} \quad (26)$$

Эффективная масса (25) отрицательна в точках $q_{1,2}$ и положительна в точке q_3 (см. рис. V10.3). Поэтому точки $\{q_1, 0\}$ (соответствующая **максимуму** потенциала) и $\{q_3, 0\}$ являются центрами; в их окрестности система совершают орби-

тально устойчивое квазипериодическое движение. Частота медленного движения определяется начальными условиями для переменных q и p . Точка $\{q_2, 0\}$ (соответствующая **минимуму** потенциала) является седлом. Линия уровня гамильтониана (20), соответствующая седловому значению энергии,

$$E_s \approx -\frac{4}{3}\Delta^2 - F\sqrt{\frac{8}{3}\Delta}, \quad (27)$$

является сепаратрисой, которая делит фазовую плоскость $\{q, p\}$ на три области. Область, содержащая точку $\{q_3, 0\}$, является консервативным нелинейным резонансом.

Отметим, что точка $\{q_1, 0\}$ описывает нерезонансное решение, которое может быть определено пренебрежением нелинейностью - заменой осциллятора Дуффинга на гармонический осциллятор (ср. (12)).

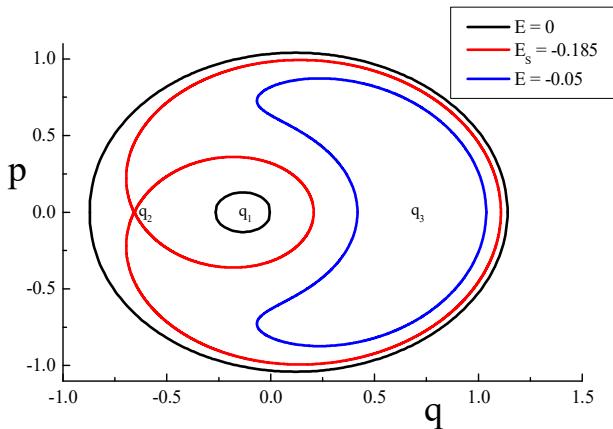


Рис. V10.4

Фазовый портрет системы медленных амплитуд для консервативного осциллятора Дуффинга D_{1+} под действием гармонической силы величины $F = 0.05$ при расстройке $\Delta = 0.2 = 1.72\Delta_c$.

◆◆ Гамильтонова система с одной степенью свободы под воздействием слабого ($F \ll 1$) гармонического возмущения $F \cos \omega t$ почти всегда совершает квазипериодическое двухчастотное движение, одна из частот которого, Ω_1 , равна частоте возмущения ω .

Если частота возмущения ω далека от частоты движения Ω невозмущенной системы с теми же начальными условиями (движение вдали от нелинейного консервативного резонанса), то вторая частота $\Omega_2 \approx \Omega$ и слабо зависит от амплитуды возмущения F . Движение системы эффективно описывается суперпозицией двух периодических движений.

Если частота ω близка к частоте Ω движения невозмущенной системы (движение внутри консервативного резонанса или вблизи него), то вторая частота Ω_2 мала, зависит от начальных условий и от величины возмущения F . Движение системы эффективно описывается моделью слабомодулированного (периодически) гармонического движения.

Граница между этими случаями определяется интервалом частот, в котором возможен консервативный нелинейный резонанс.

