

## V09 СУБ- И СУПЕРГАРМОНИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНСЫ В ОСЦИЛЛЯТОРЕ ДУФФИНГА

### § 01 Моды и конечномодовые приближения

- ◆ Если закон движения  $x(t)$  представляется в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^M A_k f_k(t), \quad (1)$$

где  $f_k(t)$  - известные функции, то

- эти функции называются **модами** (от латинского *modus*: здесь – тип, образец);
- коэффициенты  $A_k$  называются **амплитудами мод**;
- параметр  $M$  называется **числом мод**;
- форма (1) называется  **$M$ -модовым приближением**.

- ◆ Для описания свойств диссипативного нелинейного резонанса в системе

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + x^3 = F \cos \omega t \quad (2)$$

в V08 мы использовали двухмодовое синхронное приближение

$$x_0(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (3)$$

в котором частоты мод **совпадали** с частотой внешнего воздействия. Стандартная процедура подстановки (3) в (2), Фурье-разложения и приравнивания и коэффициенты при модах приводят к системе кубических («трилинейных») уравнений (08.11), (08.12), решения которых отыскивались с помощью искусственных приемов. В §08.5 решение (3) было уточнено с помощью теории возмущений – добавлены **малые** члены с утроенной частотой.

- ◆ Найденное таким образом решение не описывает всех возможных периодических движений в системе (1). Во-первых, частота движения может составлять кратную долю частоты воздействия  $\omega$ ,  $n\Omega = \omega$  – так называемый субгармонический резонанс порядка  $n$  (важнейшим для модели (1) является случай  $n = 3$ ). Во-вторых, выбор в качестве нулевого приближения двухмодового синхронного приближения (3) предполагает малость амплитуд отброшенных высших гармоник. Это предположение может нарушаться, если частота движения  $\Omega$  кратна частоте воздействия  $\omega$  – так называемый супергармонический резонанс порядка  $n$ :  $\Omega = n\omega$  (важнейшим для модели (2) является случай  $n = 3$ : см. (V08.41)). Описание соответствующих законов движения, существенно отличающихся от найденных в предыдущей лекции, возможно при использовании четырехмодового приближения

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t + c \cos 3\omega t + d \sin 3\omega t \quad (4)$$

и записи возмущения в виде  $F \cos 3\omega t$  для субгармонического и  $F \cos \omega t$  для супергармонического случаев. Прямое использование стандартной процедуры приведет к системе четырех трилинейных уравнений для амплитуд  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ . Исключение всех переменных, кроме одной, даст уравнение высокой (81-й?) степени, исследование которого аналитическими методами безнадежно, а численными – обременительно. Задача упрощается, если затухание  $\gamma$  можно считать пренебрежимо малым параметром. Поскольку амплитуды квадратурных компонент  $b$  и  $d$  при этом оказываются малы (обращаются в ноль при  $\gamma \rightarrow 0$ ), в качестве нулевого можно использовать двухмодовое приближение

$$x_0(t) = a \cos \omega t + c \cos 3\omega t. \quad (5)$$

Основываясь на этом, в следующих параграфах мы исследуем простейшие движения в субгармоническом и супергармоническом резонансах модели (2).

## § 02 Субгармонический резонанс: пренебрежимо малое затухание

◆ **Субгармоническим резонансом** порядка  $n$  в неавтономной системе с периодическим воздействием называется область параметров, в которой существует периодическое движение с частотой в  $n$  раз **меньше** частоты поля. Рассмотрим субгармонический резонанс третьего порядка для диссипативного осциллятора Дуффинга, уравнение движения которого запишем в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + x + x^3 = F \cos 3\omega t, \quad (6)$$

чтобы сохранить обозначение  $\omega$  за частотой движения. В дальнейшем мы будем считать силу умеренной,  $F \leq 1$ , и будем рассматривать область частот, недалеко отстоящих от частоты малых колебаний:  $0 \leq \omega^2 - 1 \leq 1$ .

◆ Начнем со случая, когда затухание  $\gamma$  можно считать пренебрежимо малым. Тогда решение уравнения

$$\ddot{x} + x + x^3 = F \cos 3\omega t \quad (7)$$

можно представить в виде суперпозиции первой и третьей гармоники

$$x(t) = \xi(t) + \eta(t) = a \cos \omega t + c \cos 3\omega t, \quad (8)$$

пренебрегая сдвинутыми по фазам компонентами. В нулевом приближении пренебрежем нелинейным членом в левой части (7). Тогда компоненту с частотой  $3\omega$  можно описать как вынужденные колебания линейного осциллятора с пренебрежимо малым затуханием:

$$\eta(t) = c \cos 3\omega t = -\frac{F}{9\omega^2 - 1} \cos 3\omega t \quad (9)$$

Подставив решение в виде  $x(t) = \xi(t) + \eta(t)$  в уравнение (7), для функции  $\xi(t)$  получим уравнение

$$\ddot{\xi} + \xi + \xi^3 = -\eta^3 - 3\eta^2\xi - 3\eta\xi^2 \quad (10)$$

Подставляя в правую часть выражения для  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  (8) и сохраняя только члены с частотой  $\omega$ , получим уравнение

$$\ddot{\xi} + \xi + \xi^3 = -\frac{3}{4}(2ac^2 - a^2c)\cos\omega t \quad (11)$$

Теперь задача свелась к определению движения к рассмотренной ранее задаче о движении консервативного нелинейного осциллятора Дуффинга с амплитудой силы

$$\tilde{F} = -\frac{3}{4}(2ac^2 - a^2c) \quad (12)$$

Из уравнения (11) (ср. V08.11) получаем квадратное уравнение для  $a$

$$1 + \frac{3}{4}a^2 - \omega^2 + \frac{3}{4}c(2c - a) = 0 \quad (13)$$

корни которого даются формулой

$$a = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{3}(\omega^2 - 1) - \frac{7}{4}c^2} \quad (14)$$

❖ Методом, изложенным в V08.4, можно показать, что устойчивым является только решение, которому соответствует знак "−" перед корнем: соответствующая амплитуда всегда отрицательна.

Корни уравнения (13) вещественны, если частота возмущения  $3\omega$  превосходит пороговую частоту, приближенно равную

$$3\omega_c \approx 3 \left( 1 + \frac{21}{2048} F^2 \right) \quad (15)$$

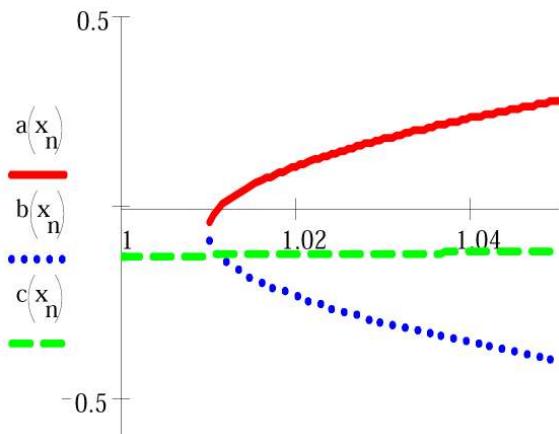


Рис. V09.1

Зависимости амплитуд первой (сплошная и штриховая линии) и третьей (штрих-пунктирная линия) гармоник движения вблизи порога субгармонического резонанса в осцилляторе Дуффинга с пренебрежимо малым трением при  $F = 1$ .

Из условия положительности подкоренного выражения в (14) получаем также границу области существования субгармонического резонанса на плоскости переменных  $\{F, \omega\}$  в системе с пренебрежимо малым трением: такой резонанс существует при  $\omega > 1$ , если сила не превосходит значения

$$F_l = \frac{4}{\sqrt{21}} \sqrt{\omega^2 - 1} (9\omega^2 - 1) \approx 6.983 \sqrt{\omega^2 - 1} \quad (16)$$

На пороге субгармонического резонанса амплитуда первой гармоники **конечна** и равна половине амплитуды третьей гармоники - коэффициент ангармонизма колебаний  $\nu = 4$  (см. рис. V01.2).

### § 03 Субгармонический резонанс: конечное затухание

◆ Рассмотрим теперь субгармонический резонанс с учетом конечной величины затухания. Движение можно приближенно описать законом

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t + c \cos 3\omega t \quad (17)$$

Поскольку с ростом частоты амплитуда первой гармоники быстро растет, а амплитуда третьей медленно падает, можно пренебречь в выражении для возмущающей силы (12) первым слагаемым и рассмотреть задачу о движении диссипативного осциллятора Дуффинга под действием вынуждающей силы

$$\tilde{F} = \frac{3}{4} A^2 c \quad (18)$$

где  $A$  - фурье-амплитуда первой гармоники движения ( $A^2 = a^2 + b^2$ ). Из уравнения (V08.13) получаем

$$\left(1 + \frac{3}{4} A^2 - \omega^2\right)^2 A^2 + 4\gamma^2 \omega^2 A^2 = \frac{9}{16} A^4 c^2 \quad (19)$$

◇ Возможность использовать это уравнение оправдана предположением о малости затухания. Поэтому амплитуда квадратурной компоненты мала,  $b \ll a$ , и можно пренебречь в правой части членом, пропорциональным  $abc$ , по сравнению с  $a^2 c$ .

Нетривиальные (отличные от нуля) корни уравнения (19) определяются биквадратным уравнением, которое подстановкой  $z = A^2$  сводится к квадратному

$$z^2 + z \left[ \frac{8}{3} (1 - \omega^2) - c^2 \right] + \frac{16}{9} (1 - \omega^2)^2 + \frac{64}{9} \gamma^2 \omega^2 = 0 \quad (20)$$

Корни этого уравнения вещественны, если положителен дискриминант

$$D(F, \omega) = c^4 + \frac{16}{3} c^2 (\omega^2 - 1) - \frac{256}{9} \gamma^2 \omega^2 \quad (21)$$

Поскольку в области, которую мы исследуем,  $c \ll 1$ , то первым членом в этом выражении можно пренебречь. Тогда условие положительности дискриминанта приобретает вид

$$c^2 (\omega^2 - 1) \geq \frac{16}{3} \gamma^2 \omega^2 \quad (22)$$

Используя выражение (9) для  $c$ , находим, что уравнение (20) имеет вещественные корни, если сила больше значения

$$F_- = \gamma \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - 1}} (9\omega^2 - 1) = \gamma \Phi(\omega) \quad (23)$$

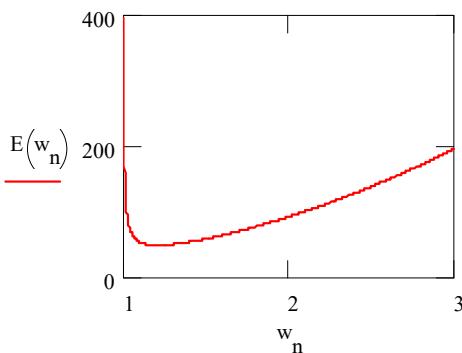


Рис. V09.2

Функция  $\Phi(\omega)$ , определяющая границу области существования субгармонического резонанса в диссипативном осцилляторе Дуффинга.

Функция  $\Phi(\omega)$  в правой части (23) при значении частоты

$$\omega_- = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{73}}{12}} = 1.209 \quad (24)$$

имеет минимум, равный  $\Phi(\omega_-) = 49.948$ . Таким образом, для возникновения субгармонического резонанса в системе с затуханием амплитуда внешней силы должна превосходить критическое значение

$$F_c = 50\gamma. \quad (25)$$

Если  $F \gg F_c$ , то, используя асимптотики функции  $F_-$

$$F_- \approx \gamma \frac{32}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega-1}} \quad (\omega-1 \ll 1) \quad (26)$$

$$F_- \approx \gamma \frac{36}{\sqrt{3}} \cdot \omega^2 \quad (\omega \gg 1) \quad (27)$$

можно найти границы области субгармонического резонанса. Такой резонанс существует в полосе частот  $\omega_L < \omega < \omega_R$ , где

$$\omega_L \approx 1 + \frac{1}{14.6} \left( \frac{F_c}{F} \right)^2, \quad \omega_R \approx 1.55 \sqrt{\frac{F}{F_c}} \quad (28)$$

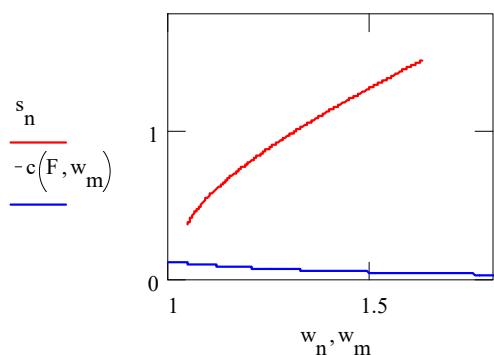


Рис. V09.3

Фурье-амплитуды первой (сплошная линия) и третьей (штриховая линия) гармоник движения при субгармоническом резонансе в осцилляторе Дуффинга с  $\gamma = 0.015$  и  $F = 1.0 = 1.33F_c$ . Резонанс существует при  $1.05 \leq \omega \leq 1.62$ .

Амплитуда первой гармоники конечна всюду в области существования резонанса и, как и было предположено при выводе формулы (11), всюду существенно превосходит амплитуду третьей гармоники. Отметим, что в условиях

рассматриваемого примера зависимость  $A(\omega)$ , заданная уравнением (19), **во всей** области субгармонического резонанса **хорошо** описывается полученной в пренебрежении затуханием формулой (14): средняя относительная погрешность такого приближения равна 0.7%.

◆ Отметим, что в области существования субгармонического резонанса третьего порядка обязательно существует также устойчивое решение, соответствующее нижней (нерезонансной) ветви нелинейного резонанса, рассмотренного в V08.

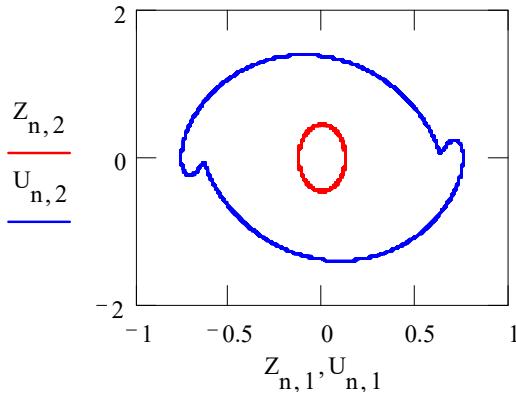


Рис. V09.4

Проекции на фазовую плоскость  $x - \dot{x}$  фазовых траекторий периодических движений осциллятора Дуффинга с  $\gamma = 0.015$  и  $F = 1.5$  и  $\omega = 1.2$ . Внутренняя линия - нерезонансное движение, внешняя - движение в субгармоническом резонансе.

Хотя фурье-амплитуды этих движений на частоте действующей силы ( $3\omega$ ) близки, движение в субгармоническом резонансе проходит в существенно более обширной области фазового пространства (см. рис. V09.4). Кроме того, эти решения сильно различаются по степени ангармонизма.

◆◆ Для описания периодических движения типа супергармонического резонанса в диссипативном осцилляторе Дуффинга под периодическим воздействием в случае пренебрежимо малого затухания эффективно использование двухмодового (8), а в случае учета затухания – трехмодового приближения (17).

В этих приближениях возможно последовательное определение амплитуд – амплитуда нерезонансной моды находится из модели гармонического осциллятора (9), после чего задача сводится к исследованию основного нелинейного резонанса под воздействием возмущения, величина которого зависит от амплитуд мод [(12) и (18)], что позволяет определить амплитуду резонансной моды решением квадратных уравнений [(13) и (20)].

Хотя такой подход есть суррогат самосогласованного решения системы уравнений для всех учтенных амплитуд мод, его результаты достаточно точны.

## § 04 Супергармонический резонанс

◆ **Супергармоническим резонансом** порядка  $n$  в неавтономной системе с периодическим воздействием называется мультистабильность периодических движений, возникающая в области, где частота внешней силы в  $n$  раз **меньше** частоты малых колебаний. Рассмотрим супергармонический резонанс третьего

порядка для осциллятора Дуффинга, при этом ограничимся случаем, когда затухание  $\gamma$  можно считать пренебрежимо малым:

$$\ddot{x} + x + x^3 = F \cos \omega t, \quad (29)$$

В дальнейшем мы будем считать силу умеренной,  $F \leq 1$ , и будем рассматривать область частот, недалеко отстоящих от частоты малых колебаний, деленной на три:  $\omega \sim 1/3$ .

◆ Тогда решение уравнения (29) можно представить в виде суперпозиции первой и третьей гармоники

$$x(t) = \xi(t) + \eta(t) = a \cos \omega t + c \cos 3\omega t, \quad (30)$$

пренебрегая сдвигнутыми по фазам компонентами. Подставляя решение (30) в уравнение (29) и приравнивая коэффициенты при  $\cos \omega t$  и  $\cos 3\omega t$ , приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} a(1 - \omega^2) + \frac{1}{4}(3a^3 + 3a^2c + 6ac^2) &= F, \\ c(1 - 9\omega^2) + \frac{1}{4}(a^3 + 6a^2c + 3c^3) &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Эта система уравнений может быть сведена к одному уравнению девятой степени для  $c$  и решена численно.

◆ Для получения приближенных аналитических зависимостей пренебрежем нелинейным членом в первом из уравнений (31). Тогда компоненту с частотой  $\omega$  можно описать как вынужденные колебания линейного осциллятора под действием внешней силы:

$$\xi(t) = a \cos \omega t = -\frac{F}{\omega^2 - 1} \cos \omega t \quad (32)$$

Тогда второе из уравнений (31) принимает форму кубического уравнения для  $c$

$$c^3 + \frac{4}{3}\left(1 - 9\omega^2 + \frac{3}{2}a^2\right)c + \frac{1}{3}a^3 = 0 \quad (33)$$

Зависимость действительных корней этого уравнения от параметров  $F$  и  $\omega$  нам и предстоит исследовать.

◆ Уравнение (33) всегда имеет по крайней мере один вещественный корень. При малых  $c \ll a \ll 1$  этот корень можно приближенно найти, опустив член  $c^3$ :

$$c \approx -\frac{a^3}{4\left(1 - 9\omega^2 + \frac{3}{2}a^2\right)} \quad (34)$$

Из сравнения с формулой (V08.41) видно, что формулы (30), (32) и (34) описывают уже известное нам нерезонансное движение. В области  $\omega \geq 1$ , которую мы исследовали ранее, знаменатель (34) велик по абсолютной величине. Выраже-

ние (34) заведомо теряет применимость вблизи значения частоты  $\omega_r$ , при котором его знаменатель обращается в нуль: при  $F \ll 1$

$$\omega_r^2 \approx \frac{1}{9} - \frac{27}{128} F^2. \quad (35)$$

Это значение лежит как раз в той области  $\omega \approx 1/3$ , которую мы собирались исследовать. Из уравнения (33) следует, что на частоте  $\omega_r$  амплитуды первой и третьей гармоник близки по величине:

$$c(\omega_r) = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} a(\omega_r) = -0.693 a(\omega_r) \quad (36)$$

Коэффициент ангармонизма таких колебаний  $v = 0.48$ .

◆ Рассмотрим условия существования других решений уравнения (33). Кубическое уравнение имеет один или три вещественных корня. На пороге бифуркации оно имеет двукратный корень:

$$x^3 + px + q = (x - a)(x - b)^2. \quad (37)$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при разных степенях  $x$ , получаем:

$$D(p, q) = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 0. \quad (38)$$

Это известное из формул Кардано выражение для дискриминанта кубического уравнения, который должен быть отрицателен для того, чтобы оно имело три вещественных корня. Для уравнения (33) это означает, что два дополнительных корня существуют при условии

$$\frac{4}{3} \left( 1 - 9\omega^2 + \frac{3}{2} a^2 \right) < -\left( \frac{3}{4} \right)^{1/3} a^2 \quad (39)$$

Таким образом, дополнительные корни существуют при условии, что величина силы не превосходит значения

$$F < F_l(\omega) = \frac{2(1 - \omega^2)\sqrt{9\omega^2 - 1}}{\sqrt{3(2 + (3/4)^{1/3})}} \approx 0.677(1 - \omega^2)\sqrt{9\omega^2 - 1} \quad (40)$$

Функция  $F_l(\omega)$  достигает максимума, равного  $F_c = 0.655$  при значении частоты

$$\omega_c = \sqrt{\frac{11}{27}} = 0.638 \quad (41)$$

При заданной величине силы  $F < F_c$  супергармонический резонанс существует в диапазоне частот  $\omega_- < \omega < \omega_+$ , границы которого  $\omega_{\mp}$  определяются условием  $F = F_l(\omega_{\mp})$ . На границах супергармонического резонанса амплитуда третьей

гармоники, заданная дополнительными корнями уравнения (33), **конечна** и связана с амплитудой первой гармоники соотношением

$$c(\omega_{\mp}) = -\frac{1}{\sqrt[3]{6}} a(\omega_{\mp}) \approx -0.55 a(\omega_{\mp}). \quad (42)$$

Коэффициент ангармонизма таких колебаний  $v \approx 0.3$ .

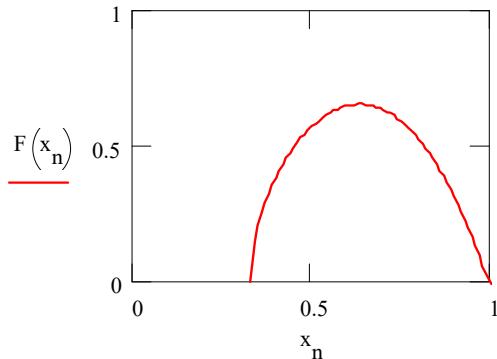


Рис. V09.5

Функция  $F_l(\omega)$ , определяющая границу области существования супергармонического резонанса в консервативном осцилляторе Дуффинга.

◆ Вдали от границ супергармонического резонанса дополнительные вещественные корни уравнения (33) можно найти, приняв, что  $c \gg a$ . Тогда, опуская в уравнении свободный член и пренебрегая слагаемым с  $a^2$  в скобках, получаем для амплитуд третьей гармоники значения

$$c_{2,3} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{9\omega^2 - 1}. \quad (43)$$

◆ Найденные нами решения основаны на рискованных предположениях. При их построении предполагалось, что амплитуда первой гармоники  $a$  не зависит от амплитуды третьей гармоники  $c$  и может быть описана тем же выражением (32), что и для вынужденных колебаний линейного осциллятора. Полученное решение (43) противоречит этой предпосылке: значения  $c$  настолько велики, что пренебречь их влиянием на амплитуду первой гармоники уже нельзя.

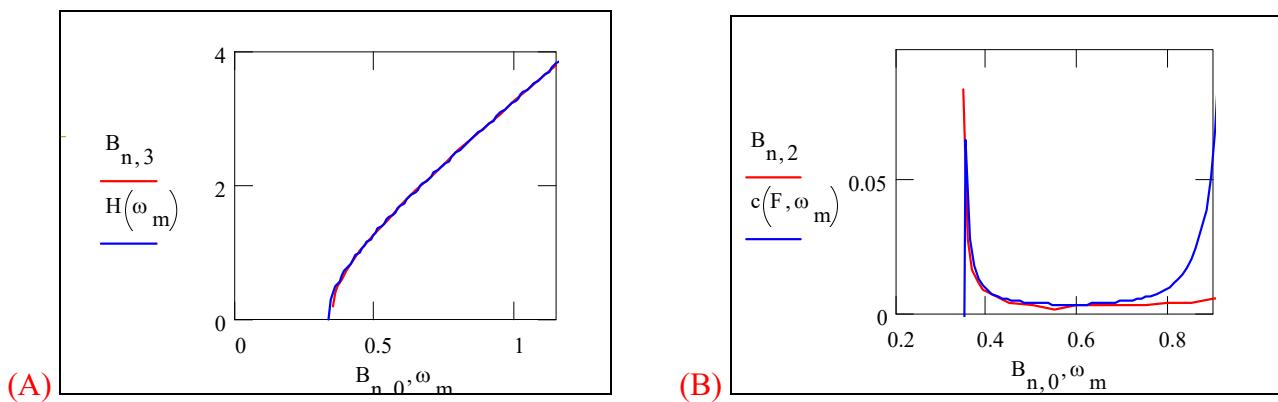


Рис. V09.6

Зависимости от частоты резонансной (A) и нерезонансной (B) амплитуд третьей гармоники движения в супергармоническом резонансе в осцилляторе Дуффинга с пренебрежимо малым затуханием при  $F = 0.2 = 0.305F_c$ , найденные численным решением системы (31) (красные линии) и по формулам (43) (A) и (44) (B) (синие линии). На рис. A различить линии можно только вблизи низкочастотной границы резонанса: для системы (31)  $\omega_r = 0.348$ . На рис. B

согласие ухудшается с приближением к частоте основного резонанса ( $\omega = 1$ ), где формула (32) утрачивает применимость.

Численное решение исходной полной системы уравнений (31) для амплитуд обеих мод показано на рис. V.09.6. Несмотря на рискованные приближения, вблизи нижней частотной границы супергармонического резонанса найденные нами приближенные решения вполне удовлетворительны. Следует отметить, что из системы (31) вытекает отсутствие верхней спектральной границы супергармонического резонанса для систем с пренебрежимо малым затуханием. Это объяснимо: при больших значениях частоты  $\omega \gg 1$  резонансное супергармоническое движение можно представить как суперпозицию свободных колебаний большой амплитуды  $c$  с частотой  $3\omega$  и нерезонансных вынужденных колебаний малой амплитуды  $a$  с частотой  $\omega$ .

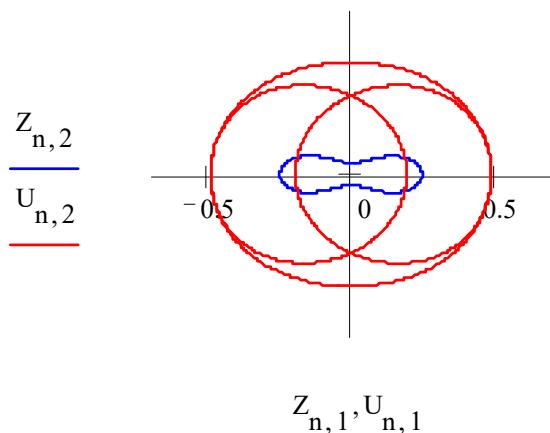


Рис. V09.7

Проекции на фазовую плоскость  $x - \dot{x}$  фазовых траекторий периодических движений осциллятора Дуффинга с пренебрежимо малым затуханием и  $F = 0.2$  и  $\omega = 0.36$ , найденных численным интегрированием уравнения движения (29). Внутренняя (синяя) линия - нерезонансное движение, внешняя (красная) - движение в супергармоническом резонансе.

◆ В заключение следует отметить, что полученные и для суб-, и для супергармонического резонанса решения требуют проверки их устойчивости. Для этого к уже полученным решениям в форме (8) или (30) следует добавить малое возмущение:

$$x(t) = a \cos \omega t + c \cos 3\omega t + y(t) \quad (44)$$

и проверить, не будет ли оно возрастать. Подставляя решение (44) в уравнение

$$\ddot{x} + x + x^3 = F \cos \Omega t, \quad (45)$$

где  $\Omega = \omega$  для супергармонического или  $\Omega = 3\omega$  - для субгармонического резонанса, и лианеризуя его относительно  $y$ , получаем для функции  $y(t)$  линейное дифференциальное уравнение с параметрическим воздействием. Исследование поведения этого уравнения оказывается слишком громоздким, поэтому мы не будем этого делать. Однако общие методы исследования параметрически модулированного осциллятора будут рассмотрены в одной из следующих лекций.

