

## V08 КОЛЕБАНИЯ В ДВУМЕРНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ

### § 01 Неавтономные системы: силовое и параметрическое воздействия

◆ Модели неавтономных динамических систем обычно вводятся для описания изменяющегося со временем воздействия на некоторую автономную динамическую систему со стороны ее окружения. Пусть исходные уравнения движения невозмущенной автономной системы имеют вид

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{a}, \vec{x}) \quad (1)$$

где  $\vec{x}$  - вектор состояния,  $\vec{a}$  - вектор параметров. Принято называть исходную систему (1) **невозмущенной**, а воздействие на нее называть **возмущением**. Как правило, учет воздействия окружения приводит к тому, что параметры невозмущенной системы становятся заданными функциями времени, а к правым частям уравнений движения добавляются дополнительные члены, описывающие возмущение: уравнения движения приобретают вид

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{a}(t), \vec{x}) + \vec{f}(\vec{b}, \vec{x}, t) \quad (2)$$

где  $\vec{b}$  - вектор параметров возмущения.

При анализе таких задач принято выделять два предельных случая. Если параметры исходных уравнений движения остаются неизменными, а воздействие на систему может быть описано только дополнительными членами - возмущениями  $\vec{f}$ :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{a}, \vec{x}) + \vec{f}(\vec{b}, \vec{x}, t), \quad (3)$$

то воздействие на систему называется **силовым**. Если же воздействие на систему может быть описано только введением зависимости параметров в невозмущенных уравнениях движения от времени,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{a}(t), \vec{x}), \quad (4)$$

то такое воздействие называется **параметрическим**. Такое разделение удобно, хотя в определенной мере условно.

◆ **Пример 1.** Для невозмущенной модели гармонического осциллятора с уравнением движения  $\ddot{q} + \Omega^2 q = 0$  параметрическое воздействие, приводящее к изменению частоты и к уравнению движения

$$\ddot{q} + \Omega^2 [1 + \varepsilon \cos \omega t] q = 0, \quad (5)$$

может быть также описано моделью осциллятора с силовым воздействием

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = -\Omega^2 \varepsilon q \cos \omega t. \quad (6)$$

◆ **Пример 2.** Рассмотрим математический маятник, у которого частица несет электрический заряд  $e$ , помещенный в однородное электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}(t)$ , сохраняющей постоянное направление (под углом  $\Theta$  к направлению силы тяжести), но изменяющееся со временем по величине. Уравнение движения для этой системы таково:

$$m\ddot{\varphi} + (mg + eE(t)\cos\Theta)\sin\varphi = eE(t)\sin\Theta\cos\varphi \quad (7)$$

При  $\Theta = 0$  воздействие электрического поля на систему является параметрическим, а при  $\Theta = \pi/2$  - силовым. При промежуточных углах оно имеет общий вид (2).

◆ Наиболее важными в теории неавтономных систем являются задачи о периодическом воздействии. Мы ограничимся рассмотрением случаев, когда внешнее воздействие изменяется во времени по гармоническому закону,

$$z(t) = Z\cos\omega t. \quad (8)$$

Если аттракторами невозмущенной системы являются только положения равновесия, то установившимися движениями возмущенной системы под гармоническим воздействием являются, как правило, периодические движения с частотой, равной частоте воздействия, или близкие к ним движения. В этом случае основной задачей является исследование характеристик периодического движения - его фурье-амплитуд – от амплитуды  $Z$  и частоты  $\omega$  воздействия.

Если установившееся движение невозмущенной системы является периодическим - с частотой, зависящей от начальных условий (как для интегрируемых систем) или с частотой, зависящей только от параметров системы (как для систем с устойчивым предельным циклом), то в ней под действием гармонического возмущения могут существовать как периодические (одночастотные), так и квазипериодические (двухчастотные) движения. Для таких систем основной задачей является разделение пространства параметров  $(Z, \omega)$  на области с периодическим и квазипериодическим движением, и исследование их характеристик.

Последовательность нашего изложения в последующих разделах будет такова. Вначале мы рассмотрим задачи исследования установившегося периодического движения с частотой внешнего воздействия. При этом будет продемонстрировано явление *динамической мультистабильности* - возможность в определенных областях параметров наличия двух или нескольких различных устойчивых *движений* с одной и той же частотой.

Затем мы обратимся к исследованию систем, в которых возможны квазипериодические движения - и рассмотрим такие движения сначала в системах, которые в отсутствие возмущения являются интегрируемыми, а затем в системах с предельным циклом.

## § 02 Нелинейный резонанс в диссипативном осцилляторе Дуффинга

◆ В качестве примера периодических колебаний в неавтономной системе с одной степенью свободы рассмотрим задачу о движении осциллятора Дуффинга  $D_{1+}$  с затуханием под действием гармонической силы. Уравнение движения такой системы имеет вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + x^3 = F\cos\omega t. \quad (9)$$

Эта модель характеризуется тремя параметрами -  $\gamma$ ,  $F$  и  $\omega$ . Далее мы будем считать затухание  $\gamma$  фиксированным **малым** параметром, а амплитуду внешней силы  $F$  и частоту воздействия  $\omega$  - управляющими параметрами.

◆ Представим периодическое решение в виде суперпозиции сдвинутых по фазе на  $\pi/2$  гармонических колебаний с частотой, равной частоте возмущения:

$$x_0(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t. \quad (10)$$

Подставляя решение (10) в уравнение (9) и приравнивая коэффициенты при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ , приходим к системе уравнений

$$\left(1 + \frac{3}{4} A^2 - \omega^2\right) a + 2\gamma\omega b = F, \quad (11)$$

$$\left(1 + \frac{3}{4} A^2 - \omega^2\right) b - 2\gamma\omega a = 0, \quad (12)$$

где  $A^2 = a^2 + b^2$ . Возводя эти уравнения в квадрат и складывая, получаем уравнение для квадрата амплитуды первой гармоники вынужденных колебаний  $A^2$

$$\left(1 + \frac{3}{4} A^2 - \omega^2\right)^2 A^2 + 4\gamma^2\omega^2 A^2 = F^2 \quad (13)$$

Это - кубическое уравнение относительно величины  $z = A^2$ . В зависимости от значений параметров оно может иметь один или три вещественных корня.

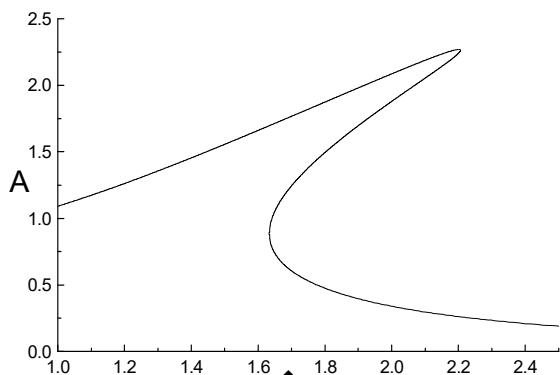


Рис. V08.1

Зависимость амплитуды  $A$  периодических колебаний диссипативного осциллятора Дуффинга  $D_{1+}$  от частоты  $\omega$  при значениях параметров  $\gamma = 0.1$  и  $F = 1.0 = 7.80F_c$ . Результаты, полученные при численном решении уравнения движения (9), отличаются от полученных по формуле (13), не более чем на 2%.

Важную роль играют критические значения параметров  $F_c$  и  $\omega_c$ , при которых все три вещественных корня совпадают (то есть происходит бифуркация удвоения). Обозначим это значение  $\zeta$ . Полагая

$$\left(1 + \frac{3}{4} z - \omega_c^2\right)^2 z + 4\gamma^2\omega_c^2 z - F_c^2 = \frac{9}{16}(z - \zeta)^3 \quad (14)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ , получаем следующую систему уравнений:

$$-3\zeta = \frac{8}{3}(1 - \omega_c^2), \quad (15)$$

$$3\zeta^2 = \frac{16}{9}(1 - \omega_c^2)^2 + \frac{64}{9}\gamma^2\omega_c^2, \quad (16)$$

$$-\zeta^3 = -\frac{16}{9}F_c^2. \quad (17)$$

Исключая  $\zeta$  из уравнений (15) и (16), находим для значения критической частоты выражение

$$\omega_c^2 = 1 + 6\gamma^2 + 2\sqrt{9\gamma^4 + 3\gamma^2}. \quad (18)$$

Из уравнений (15) и (17) с помощью (18) находим критическое значение амплитуды внешней силы:

$$F_c = \frac{16}{9}(3\gamma^2 + \sqrt{9\gamma^4 + 3\gamma^2})^{3/2}. \quad (19)$$

При малых значениях затухания  $\gamma$  выражения (18) и (19) упрощаются:

$$\omega_c \approx 1 + 2\sqrt{3}\gamma, F_c \approx 16 * 3^{-5/4}\gamma^{3/2} \approx 4.052\gamma^{3/2}. \quad (20)$$

Если амплитуда внешней силы превосходит критическое значение  $F_c$ , то кубическое уравнение (13) может иметь три действительных положительных корня - в некотором интервале частот в системе возможны периодические (с частотой внешнего воздействия) колебания с **тремя** различными значениями амплитуды. Ниже мы покажем, что только **два** из этих значений амплитуды соответствуют устойчивым движениям. Диссипативный осциллятор Дуффинга при этом является **бистабильной** системой, а поведение амплитуды колебаний при плавном изменении частоты внешней силы имеет **гистерезисный** характер.

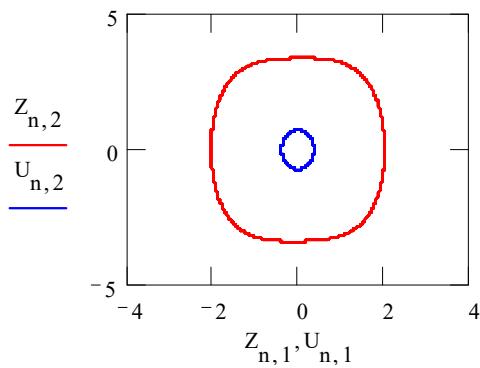


Рис. V08.2

Проекции на фазовую плоскость  $\{x, \dot{x}\}$  фазовых траекторий периодических движений осциллятора Дуффинга с  $\gamma = 0.1$ ,  $F = 1.0 = 7.80F_c$  и  $\omega = 1.92$ . Внутренняя линия - нерезонансное колебание, внешняя - резонансное.

### § 03 Границы нелинейного резонанса в диссипативной системе

- ◆ Найдем границы частотного интервала, в котором система является бистабильной, при  $F > F_c$ . На этих границах касательная к кривой  $A(\omega)$  вертикальна (см. рис. V08.1), а следовательно, производная  $dA/d\omega$  обращается в бесконечность. Дифференцируя уравнение (13) по  $\omega$  и приравнивая нуль коэффициент при  $dA/d\omega$ , получаем уравнение

$$\left(1 - \omega^2 + \frac{3}{4}z\right)^2 + \frac{3}{2}\left(1 - \omega^2 + \frac{3}{4}z\right)z + 4\gamma^2\omega^2 = 0 \quad (21)$$

Совместное решение уравнения (21) и уравнения (13), которое мы перепишем в виде

$$\left(1 + \frac{3}{4}z - \omega^2\right)^2 z + 4\gamma^2\omega^2 z = F^2 \quad (22)$$

при заданных значениях  $\gamma$  и  $F$  определяет значения частот, соответствующих границам интервала бистабильности.

◆ Найдем приближенные выражения для этих границ при малом затухании  $\gamma$ . Пренебрежем в уравнении (21) членом, содержащим  $\gamma$ . Тогда корни упрощенного уравнения суть

$$z_1 = \frac{4}{9}(\omega^2 - 1), \quad z_2 = \frac{4}{3}(\omega^2 - 1) \quad (23)$$

Из уравнения (22) видно, что при  $\omega \gg 1$  подходит второй корень  $z_2$ . При этом значении  $z$  первая скобка обращается в ноль, и остается уравнение

$$4\gamma^2\omega^2 z_2 = F^2 \quad (24)$$

Подставляя выражение для  $z_2$  из (23) в (24), находим выражение для границы области бистабильности:

$$F_+ = \frac{4}{\sqrt{3}}\gamma\omega\sqrt{\omega^2 - 1} \quad (25)$$

Разрешая это уравнение относительно  $\omega$ , находим выражение для верхней частотной границы нелинейного резонанса:

$$\omega_+ \approx \frac{3^{1/4}}{2}\sqrt{\frac{F}{\gamma}} \quad (26)$$

◆ Вторая граница области бистабильности определяется корнем  $z_1$ . Подставляя его в первую скобку уравнения (22), получаем

$$\frac{4}{9}(\omega^2 - 1)^2 z_1 + 4\gamma^2 z_1 = F^2, \quad (27)$$

откуда

$$z_1 = \frac{9F^2}{36\gamma^2 + 4(\omega^2 - 1)^2} \quad (28)$$

Подставляя  $z_1$  из (23) в (28), находим выражение для второй границы области бистабильности

$$F_- = \frac{4}{9}\sqrt{\omega^2 - 1}\sqrt{(\omega^2 - 1)^2 + 9\gamma^2} \quad (29)$$

Разрешая его относительно  $\omega$  при малых  $\gamma$ , находим выражение для нижней частотной границы нелинейного резонанса:

$$\omega_- \approx \sqrt{1 + (9F/4)^{2/3}} \approx \sqrt{1 + 1.72F^{2/3}} \quad (30)$$

Использованный подход теряет применимость, если величина силы близка к критическому значению  $F_c$ , однако этот случай может быть рассмотрен отдельно.

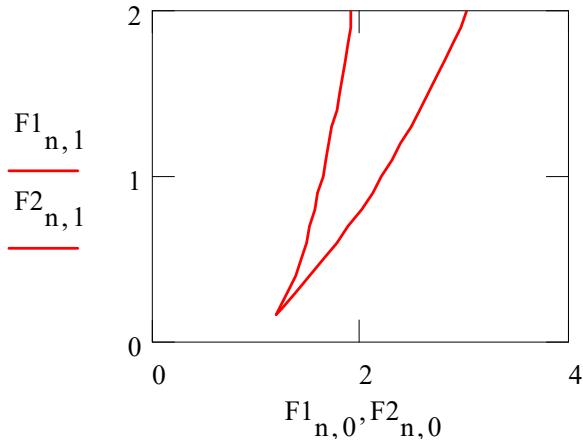


Рис. V08.3

Границы области бистабильности периодических колебаний диссипативного осциллятора Дуффинга  $D_{1+}$  на плоскости  $F - \omega$  при значении затухания  $\gamma = 0.1$ , найденные численным решением системы уравнений (22) и (23). Область бистабильности лежит между границами, сходящимися в точке  $\{\omega_c, F_c\}$ .

### § 04 Устойчивость периодического движения

◆ Для исследования устойчивости периодических колебаний используем метод медленно меняющихся амплитуд. Подставим в (9) решение вида

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (31)$$

считая, что амплитуды  $a$  и  $b$  суть медленно меняющиеся функции времени. Пренебрегая вторыми производными по времени от  $a$  и  $b$  и малыми членами второго порядка типа  $\gamma \dot{a}$  и  $\gamma \dot{b}$  и собирая коэффициенты при функциях  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ , получим систему уравнений

$$\dot{a} = \frac{1}{2\omega} \left[ \left( 1 + \frac{3}{4} A^2 - \omega^2 \right) b - 2\gamma\omega a \right], \quad (32)$$

$$\dot{b} = -\frac{1}{2\omega} \left[ \left( 1 + \frac{3}{4} A^2 - \omega^2 \right) a + 2\gamma\omega b - F \right], \quad (33)$$

Найденные в §02 значения  $a$  и  $b$  описывают неподвижные точки этой системы. Для исследования устойчивости этих точек необходимо вычислить собственные значения матрицы устойчивости  $\hat{M}$  (см. V04.1) в этих точках. Для некоторого упрощения выражений выберем в качестве единицы времени величину  $T = (2\omega)^{-1}$ . Вычисляя элементы матрицы  $\hat{M}$ , получим ее след

$$S = -4\gamma\omega \quad (34)$$

и детерминант:

$$D = \left( 1 - \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 \right)^2 + \frac{3}{2} \left( 1 - \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 \right) A^2 + 4\gamma^2\omega^2 \quad (35)$$

След всегда отрицателен, поэтому устойчивость будет определяться знаком детерминанта. Однако уравнение  $D = 0$  совпадает с полученным в §03 уравнением (21), являющимся производной уравнения (13) на неподвижные точки системы и определяющим бифуркационные значения частоты  $\omega_{\pm}$ . Таким образом, точки бифуркации всегда лежат на границе области устойчивости стационарных значений амплитуд. Поэтому в области параметров, где амплитуда периодических колебаний имеет три возможных значения, максимальное и минимальное соответствуют устойчивым периодическим движениям, а промежуточное - неустойчивому.

Таким образом, мы доказали, что в интервале частот  $\omega_- < \omega < \omega_+$  осциллятор Дуффинга с малым затуханием, находящийся под действием внешней силы, зависящей от времени по гармоническому закону, является бистабильной системой.

### § 05 Уточнение решения: третья гармоника

◆ Уточним теперь решение  $x_0(t)$ , заданное формулой (10). Представим закон движения в виде

$$x(t) = x_0(t) + \xi(t) \quad (36)$$

где  $\xi(t)$  - малая поправка. Подставив это решение в (9) и учитывая, что при определении (10) учтены все члены на первой гармонике, для поправки получим уравнение

$$\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + \xi = \frac{1}{4}(a^3 - 3ab^2)\cos 3\omega t + \frac{1}{4}(3a^2b - b^3)\sin 3\omega t \quad (37)$$

Это - уравнение колебаний линейного осциллятора с вязким трением под действием гармонической силы. Его решение, которое можно представить в виде

$$\xi(t) = c \cos 3\omega t + d \sin 3\omega t, \quad (38)$$

определяет третью гармонику в законе движения нелинейного осциллятора при установившихся колебаниях под действием гармонической силы. Подставляя решение (38) в (37) и приравнивая коэффициенты при  $\cos 3\omega t$  и  $\sin 3\omega t$ , получаем систему линейных уравнений

$$(1 - 9\omega^2)c + 6\gamma\omega d = \frac{1}{4}(a^3 - 3ab^2) \quad (39)$$

$$(1 - 9\omega^2)d - 6\gamma\omega c = \frac{1}{4}(3a^2b - b^3) \quad (40)$$

Возводя эти уравнения в квадрат и складывая, для амплитуды  $C = \sqrt{c^2 + d^2}$  третьей гармоники установившихся колебаний получаем выражение

$$C = \frac{A^3}{4\sqrt{(9\omega^2 - 1)^2 + 36\gamma^2\omega^2}} \quad (41)$$

где  $A$  - амплитуда первой гармоники колебаний. Отношение  $C/A$  почти всегда мало: так, в условиях примера, показанного на рис. V08.1  $C/A \leq 0.0442$ ; расчеты по формуле (41) дают  $C/A \leq 0.0293$ . Поэтому пренебрежение высшими гармониками при выводе уравнений для  $a$  и  $b$  оправдано, а основанные на них расчеты имеют достаточно высокую точность. Из формулы (41) видно, что предположение о малости отношения  $C/A$  может быть нарушено при  $\omega \approx 1/3$  и достаточно малом затухании, когда знаменатель правой части становится мал. Этот случай супергармонического резонанса должен быть рассмотрен отдельно.

◆◆ Для описания периодического движения в диссипативной системе, находящейся под периодическим воздействием, эффективны простейшие кинематические модели – гармонического колебания (10), медленно модулированного гармонического колебания (31) и слабо ангармонического периодического колебания (36).

Необходимое для исследования устойчивости движения использование модели слабомодулированного гармонического колебания сводит задачу к модели двумерной автономной системы, которая исследуется известными методами.

