

V07 ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ

§ 01 Свойства автоколебаний осциллятора Рэлея при $\alpha \gg 1$

◆ Если значение управляющего параметра α велико, $\alpha \gg 1$, то автоколебания осциллятора Рэлея являются релаксационными (см. V01; на рис. V01.3 показан закон движения осциллятора Рэлея при $\alpha = 5$). Для определения зависимости частоты автоколебаний Ω от управляющего параметра при больших α удобно перейти в уравнении движения

$$\ddot{x} - \alpha \dot{x}(1 - \dot{x}^2) + x = 0 \quad (1)$$

к новым переменным. Введем в качестве независимой переменной приведенное время $\tau = t/\alpha$, а в качестве динамической - переменную $x = z/\alpha$. В этих переменных уравнение движения примет вид

$$\alpha^{-2} \ddot{z} - \dot{z}(1 - \dot{z}^2) + z = 0, \quad (2)$$

эквивалентный системе уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \varepsilon \dot{y} = y(1 - y^2) - x \quad (3)$$

где новый управляющий параметр $\varepsilon = \alpha^{-2}$ мал: $\varepsilon \ll 1$.

В этом случае движение системы на предельном цикле можно описать как последовательность сменяющих друг друга быстрых и медленных движений, каждое из которых может быть описано **одним** уравнением первого порядка. Малость параметра ε означает, что почти всюду на фазовой плоскости скорость изменения y много больше скорости изменения x . Поэтому почти при любых начальных условиях фазовая точка будет быстро приближаться к кубической параболе

$$x = y - y^3, \quad (4)$$

на которой правая часть второго уравнения системы (3) обратится в ноль, при этом фазовая траектория будет близка к вертикальной прямой ($x = \text{const}$).

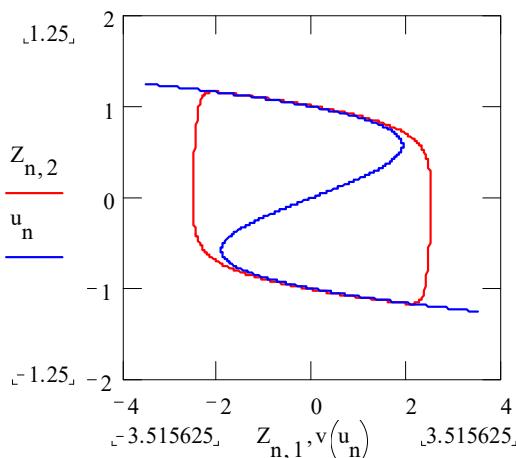


Рис. V07.1

Предельный цикл осциллятора Рэлея на фазовой плоскости переменных z, \dot{z} при $\alpha = 5$ (сплошная линия) и его аппроксимация ветвями кубической параболы (4) и прямыми (штриховые линии).

Медленное движение точки на кубической параболе (4) может быть описано одним уравнением первого порядка, получающимся из первого уравнения системы (3) при подстановке (4):

$$\frac{dy}{dt} \cdot (1 - 3y^2) = y \quad (5)$$

По достижении точки \vec{H} с координатами $\{2/3\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}$ или симметричной ей точки \vec{H}^* с координатами $\{-2/3\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}\}$ скорость медленного движения, согласно уравнению (5), обращается в бесконечность - разделение на медленные и быстрые движения теряет применимость. Вблизи этих точек фазовая траектория переходит из окрестности кубической параболы (4) на почти вертикальную фазовую траекторию, переводящую систему в окрестность точки \vec{L} с координатами $\{2/3\sqrt{3}, -2/3\sqrt{3}\}$ (или, соответственно, в точку \vec{L}^* с координатами $\{-2/3\sqrt{3}, 2/3\sqrt{3}\}$).

Таким образом, при $\alpha \gg 1$ предельный цикл осциллятора Релея может быть аппроксимирован двумя ветвями кубической параболы (4) и касательными к ним вертикальными отрезками.

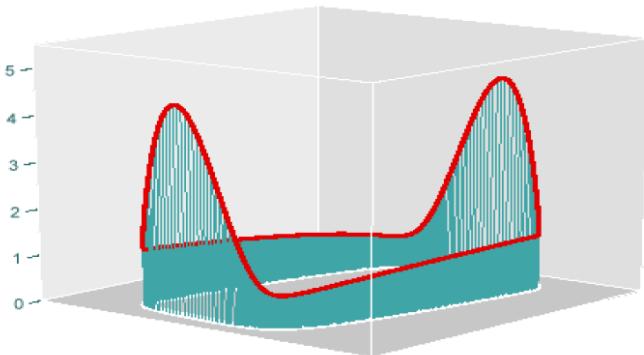


Рис. V07.2

Зависимость скорости движения фазовой точки в осцилляторе Рэлея от положения фазовой точки на предельном цикле при $\alpha = 5$. Предельные значения скорости: $\min V = 0.683$, $\max V = 4.442$.
(рисунок А.А.Никулина)

◆ Движение осциллятора Рэлея на предельном цикле происходит с сильно изменяющейся скоростью. Продолжительность интервала медленного движения по ветви кубической параболы от точки \vec{L} до точки \vec{H}^* может быть вычислена из уравнения (5):

$$T = \int_a^b \frac{d(y - y^3)}{y} = \left(\ln y - \frac{3}{2} y^2 \right) \Big|_a^b = \frac{3}{2} - \ln 2 = 0.806 \quad (6)$$

где $a = -2/3\sqrt{3}$, $b = -1/\sqrt{3}$. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ величина этого интервала не зависит от ε . Если пренебречь продолжительностью времени быстрых движений системы по вертикальным участкам предельного цикла, то в приведенной шкале времени $\Omega' = \pi/T$. В исходных переменных

$$\Omega(\alpha) = \frac{Q}{\alpha} \quad (7)$$

где константа $Q = 2\pi(3 - 2\ln 2)^{-1} = 3.894$.

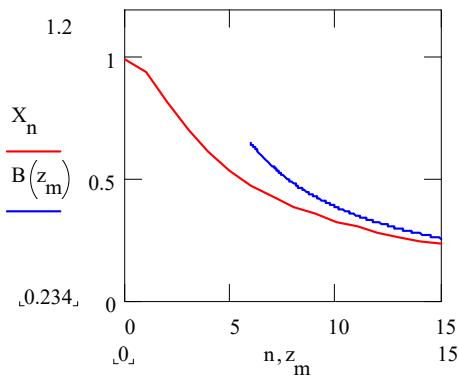


Рис. V07.3

Зависимость частоты автоколебаний осциллятора Рэлея от параметра α . Сплошная линия - численный расчет, штриховая линия по приближенной формуле (7).

◆◆ Для системы с предельным циклом основной задачей является исследование формы цикла и зависимости частоты автоколебаний от параметра.

Описание автоколебаний осциллятора Рэлея в томсоновском случае при $\alpha \ll 1$ основано на близости закона движения к гармоническим колебаниям и чаще всего использует модель слабомодулированного гармонического колебания, позволяющего свести задачу к рассмотрению одномерной автономной системы (V06.25). Альтернативой служит модель слабо ангармонического периодического колебания (V06.32).

Описание релаксационных автоколебаний осциллятора Рэлея при $\alpha \gg 1$ также достигается путем разделения движений на быстрые и медленные и исключением быстрых движений в предположении ничтожности времен их осуществления. В результате задача сводится к рассмотрению одномерной автономной системы (5).

§ 02 Общие условия существования предельных циклов

◆ Предельные циклы осциллятора Рэлея и брюселятора окружают неподвижные точки этих систем; внутри этих предельных циклов диссипация меняет знак. Оба этих свойства являются общими (что будет показано в этом параграфе) и могут быть использованы при исследовании условий существования предельных циклов.

◆ Пусть $\vec{V}(x, y)$ есть векторное поле на плоскости и S - замкнутая кривая (контуру) на ней. Величина угла поворота вектора \vec{V} поля при обходе по контуру, деленная на 2π , называется **индексом замкнутой кривой** по отношению к векторному полю.

◆ Обход контура проводится в положительном направлении - против часовой стрелки. Это же направление вращения вектора считается положительным.

Уравнения движения автономной двумерной системы

$$\dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y) \quad (8)$$

задают в каждой точке фазовой плоскости векторное поле локальной скорости $\vec{V}(x, y) = \{\dot{x}, \dot{y}\}$. В соответствии с (8) индекс кривой S дается выражением

$$j = \frac{1}{2\pi} \oint_S d\theta \left\{ \operatorname{arctg} \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \right\} \quad (9)$$

Если внутри области, охватываемой кривой S , подынтегральная функции и ее производные существуют и непрерывны, то этот интеграл равен нулю. Непрерывность подынтегральной функции и ее производной может нарушаться только в особых точках, где одновременно $G(x,y)=0$ и $F(x,y)=0$. Эти точки являются неподвижными точками системы (8).

Индексом особой точки называется индекс простой замкнутой кривой, охватывающей эту и только эту особую точку. Легко убедиться, что индекс не зависит от формы и положения кривой S . Для седловой особой точки $j = -1$, а для узла, фокуса и центра $j = +1$.

Легко показать, что индекс замкнутой кривой равен сумме индексов находящихся внутри нее особых точек. Если кривая S является замкнутой *фазовой траекторией*, то ее индекс $j = +1$. Следовательно,

Внутри предельного цикла динамической системы (8) находится по меньшей мере одна неподвижная точка системы, при этом не являющаяся седлом.

◆ Пусть S - замкнутая фазовая траектория на плоскости, и A - ее внутренняя область. Проинтегрируем по области A величину диссипации системы (см. V02.3)

$$\Lambda(\vec{x}) = -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y}. \quad (10)$$

По формуле Грина, интеграл может быть сведен к криволинейному:

$$-\iint_A \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy = -\oint_S (F dy - G dx). \quad (11)$$

Поскольку на фазовой траектории в силу уравнений движения величина $F dy - G dx = 0$, то интеграл в правой части равен нулю. Следовательно, интеграл от диссипации по внутренней области, границей которой является фазовая траектория, обращается в ноль:

$$\iint_A \Lambda(\vec{x}) dx dy = 0. \quad (12)$$

Если в некоторой односвязной области фазовой плоскости диссипация $\Lambda(\vec{x})$ не равна тождественно нулю и не меняет знака, то в этой области нет замкнутых фазовых траекторий системы - нет предельных циклов.

Это утверждение называется **критерием Бендиксона** для существования предельных циклов.

◆◆ Необходимые условия наличия предельных циклов состоят в наличии неподвижных точек с $D > 0$ и знакопеременности диссипации.

Достаточные условия в общем виде неизвестны: для обнаружения всех предельных циклов двумерной автономной системы надлежит провести полное исследование ее глобального фазового портрета.

§ 03 Бифуркации рождения предельного цикла

- ◆ Предельные циклы в динамических системах в общем случае существуют не при произвольных значениях параметров, а возникают при переходе параметра через критическое значение в результате бифуркаций.

Для осциллятора Рэлея при переходе управляющего параметра α через бифуркационное значение $\alpha_c = 0$ скачком возникает цикл конечного размера - амплитуда автоколебаний вблизи точки бифуркации имеет конечную величину: $A = 2/\sqrt{3} \sim 1$. Такое поведение автоколебательной системы при изменении параметра называется **жестким режимом возбуждения автоколебаний**.

- ◆ При другой параметризации модели иной оказывается и бифуркация. Рассмотрим уравнение для осциллятора Релея в форме

$$\ddot{y} - \dot{y}(\alpha - \dot{y}^2) + y = 0, \quad (13)$$

где динамическая переменная связана с динамической переменной исходного осциллятора Релея соотношением $y = \sqrt{\alpha}x$. Пусть $\alpha \ll 1$: положим, что решение имеет тот же вид, что и при $\alpha = 0$:

$$y = A \sin t. \quad (14)$$

Величину амплитуды A определим, потребовав, чтобы работа силы трения за период равнялась нулю:

$$Q = \int_0^{2\pi} \left\{ \dot{x}(\alpha - \dot{x}^2) \right\} \dot{x} dt = 0. \quad (15)$$

Подстановка (14) в (15) дает два решения:

$$A_1 = 0; A_2 = \sqrt{\frac{4\alpha}{3}}. \quad (16)$$

При $\alpha < 0$ решение A_1 устойчиво. При $\alpha > 0$ устойчиво решение A_2 .

Если при изменении управляющего параметра α в области $\alpha < \alpha_H$ существует устойчивая неподвижная точка, при $\alpha > \alpha_H$ неподвижная точка неустойчива, а атTRACTором является близкий к ней устойчивый предельный цикл, то в точке α_H происходит **бифуркация Хопфа**.

В приведенном примере при $\alpha = 0$ происходит бифуркация Хопфа. Амплитуда автоколебаний вблизи точки бифуркации имеет сколь угодно малую амплитуду $A_2 \sim \sqrt{\alpha}$. Такое поведение автоколебательной системы при изменении параметра называется **мягким режимом возбуждения автоколебаний**. Этот же режим возникновения предельного цикла характерен для брюсселятора.

- ◆ Приведенные примеры не исчерпывают всех возможных способов рождения предельного цикла. Укажем еще один механизм, относящийся к жесткому режиму возбуждения автоколебаний. При таком способе в критической точке

одновременно рождаются два совпадающих предельных цикла конечного размера - устойчивый и неустойчивый.

Примером системы является автогенератор с уравнением движения

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2 + \beta x^4)\dot{x} + x = 0 \quad (17)$$

представляющая обобщение осциллятора Ван дер Поля и переходящая в него при значении $\beta = 0$. В дальнейшем мы будем предполагать значение α положительным и малым, $0 < \alpha \ll 1$, и рассматривать β как управляющий параметр.

Полагая $x(t) = A(t)\cos t$, где $A(t)$ - медленно меняющаяся со временем амплитуда, найдем для последней уравнение

$$\dot{A} = -\frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{1}{4} A^2 + \frac{\beta}{8} A^4\right) A \quad (18)$$

При $0 < \beta < 1/8$ это уравнение имеет, кроме неустойчивого тривиального решения ($A_0 = 0$) два стационарных нетривиальных решения с амплитудами

$$A_{1,2} = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\beta}}{\beta}} \quad (19)$$

Устойчивым является только решение с большей амплитудой. Этим доставляется еще один пример **жесткого режима возбуждения автоколебаний**.

