

V06 ДВУМЕРНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ. СИСТЕМЫ С ПРЕДЕЛЬНЫМИ ЦИКЛАМИ

Рассмотренные в предыдущей лекции модели интегрируемых систем были консервативны. Рассмотрение двумерных интегрируемых систем закончим редким, но важным примером интегрируемой *диссипативной* системы.

§ 01 Модель Лотки - Вольтерра

◆ Модель Лотки - Вольтерра задается уравнениями движения

$$\frac{dX}{dt} = k_1 X - a_1 XY, \quad \frac{dY}{dt} = -k_2 Y + a_2 XY, \quad (1)$$

где как динамические переменные X и Y , так и все параметры положительны.

✧ Эта модель введена А. Лоткой [L20] для описания возможной химической реакции, в которой концентрации веществ испытывают незатухающие колебания. Позже В. Вольтерра [V31] интерпретировал ее как модель эволюции численности двух взаимодействующих биологических видов – хищников (Y) и жертв (X) (поэтому эту модель также называют моделью «хищник-жертва»). Некоторые свойства модели рассмотрены в [Л97, с. 38-39, 89-90].

[L20] Lotka A.J. Undamped oscillations derived from the law of mass action. J. Amer. Chem. Soc., 1920, v.42, no.8, pp.1595-1599.

[V31] Volterra V. Lecons sur la Theorie Mathematique de la Lutte pour la Vie. – Paris, Gauthier-Villars, 1931.

[Л97] Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. – М.:Наука, 1997. – 496 с.

Выбором единиц измерения переменных X и Y и масштаба времени система (1) может быть приведена к виду

$$\dot{x} = x(1 - y), \quad \dot{y} = -\mu y(1 - x). \quad (2)$$

где μ - безразмерный управляющий параметр. Локальная диссипация этой системы

$$\Lambda(x, y) = 1 - y + \mu(1 - x) \quad (3)$$

в общем случае отлична от нуля и знакопеременна. Система (2) имеет две неподвижных точки, $o_1 = \{0, 0\}$ и $o_2 = \{1, 1\}$. Точка o_1 является седлом; ее характеристические показатели $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\mu$. Точка o_2 является центром; ее характеристические показатели $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\mu}$.

Уравнение для фазовых траекторий на фазовой плоскости имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{y(1-x)}{x(1-y)}. \quad (4)$$

Это уравнение допускает разделение переменных и элементарно интегрируется:

$$(x - 1 - \ln x) + \frac{1}{\mu}(y - 1 - \ln y) = E \quad (5)$$

(константы выбраны так, чтобы в неподвижной точке $o_2 = \{1,1\}$ значение интеграла движения $E = 0$ при любом значении μ). Таким образом, интегральные кривые системы представляют собой линии уровня функции $E(x, y; \mu)$ - замкнутые кривые, окружающие неподвижную точку - центр.

Подстановкой $q = \ln y$, $p = \ln x$ система уравнений (2) сводится к каноническому виду с гамильтонианом

$$H(p, q) = (e^p - 1 - p) + \frac{1}{\mu}(e^q - 1 - q) \quad (6)$$

В этих переменных система (как и всякая гамильтонова) является консервативной, ее энергия численно равна интегралу движения E .

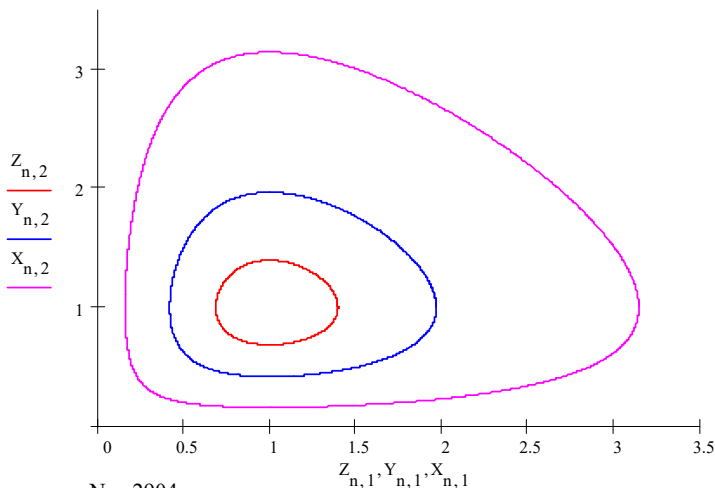


Рис. V06.1

Фазовые траектории системы Лотки-Вольтерра при $\mu = 1$ при значениях интеграла движения $E = 0.1$, 0.3 и 1.0 .

◆ Аналитическое определение зависимости частоты движения модели Лотка-Волтерра от параметра E представляет собой сложную задачу. Она была решена Фреймом [F74], который вместе с точным решением, имеющем форму ряда, получил приближенную формулу для периода

$$T(E) = 2\pi\sqrt{\mu}I_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\mu}\frac{\sqrt{E}}{6}}\right), \quad (7)$$

где $I_0(z)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода.

[F74] Frame J.S. Explicit solutions in two species Volterra system. - J. Theor. Biol. 1974, v.43, no.1, p.73-81

Зависимость частоты движения $\Omega(E)$ может быть найдена численно.

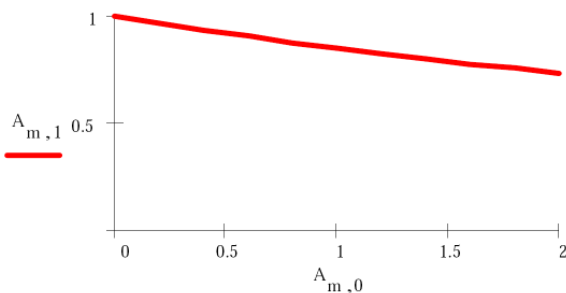


Рис. V06.2

Зависимость частоты движения Ω системы Лотки-Вольтерра при $\mu = 1$ от величины интеграла движения E .

Отметим, что зависимость частоты от интеграла движения является довольно слабой, хотя при значении $E = 2$ фазовая траектория сильно отличается от эллипса, а закон движения является сильно ангармоническим (см. рис. V06.3).

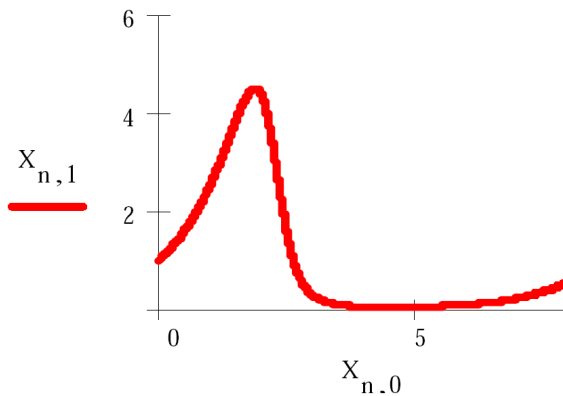


Рис. V06.3.

Закон движения $x(t)$ одной из динамических переменных системы Лотки-Вольтерра при $\mu = 1$ и $E = 2$ на одном периоде.

В двумерных интегрируемых системах фазовые траектории периодических движений – замкнутые кривые на фазовой плоскости – образуют семейства, сплошь заполняющие некоторую часть фазовой плоскости. Альтернативным классом являются системы, с изолированными замкнутыми траекториями – предельными циклами.

§ 02 Системы с предельными циклами

◆ **Предельным циклом** называется **изолированная** замкнутая фазовая траектория. Периодическое движение по такой траектории называется **автоколебаниями** динамической системы.

✧ Понятие **предельного цикла** (le cycle limite) введено А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1892). Термин "**автоколебания**" введен А.А. Андроновым (1928) для обозначения движения "устройств, могущих генерировать незатухающие колебания за счет непериодических источников энергии" [А56, с.32]. Термин переводился его автором на французский вначале как **les oscillations autoentretenues** (1929), затем как **les autooscillations** (1930). Фактически в мировой (а значит - англоязычной) литературе термин в формах **auto-oscillations** или **self-oscillations** не закрепился. В частности, он отсутствует в статьях Британской Энциклопедии.

[А56] Андронов А.А. Собрание трудов. Изд.-во АН СССР, 1956. - 538 с.

Наличие в фазовом пространстве **устойчивого** предельного цикла приводит к тому, что при начальных условиях, принадлежащих бассейну притяжения этого аттрактора, в системе со временем устанавливается периодическое движение, форма которого не зависит от начальных условий.

Периодические автоколебания систем близки по свойствам к устойчивым периодическим движениям в **неавтономных** системах с периодической зависимостью параметров от времени. В литературе можно встретить применение термина "автоколебания" и к таким движениям [РТ84, с.229-230]. Однако между ними есть и отличие: для автономных систем закон движения инвариантен при сдвиге по времени: если $\vec{x}(t)$ - закон движения на предельном цикле, то $\vec{x}(t + \tau)$ тоже есть закон движения на предельном цикле при любых значениях τ . Иными словами, фаза автоколебаний автономных систем произвольна; она определяется начальными условиями. Напротив, для устойчивых периодиче-

ских движений в неавтономных системах с периодической зависимостью параметров от времени фаза определена однозначно.

Основными задачами теории систем с предельными циклами являются:

- определение областей параметров, в которых циклы существуют, и характера бифуркации, приводящей к предельному циклу;
- исследование формы предельного цикла и зависимости частоты автоколебаний от параметров.

♦ Хорошо известным примером системы, имеющей предельный цикл, является **брюсселятор** - система с динамическими переменными $x > 0$, $y > 0$ и параметрами $a > 0$, $b > 0$, заданная уравнениями движения

$$\dot{x} = a - (b + 1)x + x^2y, \quad \dot{y} = bx - x^2y. \quad (8)$$

✧ Распределенная модель с приведенными уравнениями движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= A - (B + 1)X + X^2Y + D_1 \nabla^2 X, \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= BX - X^2Y + D_2 \nabla^2 Y, \end{aligned} \quad (9)$$

была впервые рассмотрена в работе Пригожина и Лефевра [PL68]. Эта модель описывает эволюцию в пространстве и времени концентраций $X(\vec{r}, t)$, $Y(\vec{r}, t)$ веществ, изменяющихся в ходе некоторой вымышленной (по словам одного из авторов, «Эта модель далека от реальной, но удобна для исследования благодаря своей простоте.» [ГП73, с.214]) «тримолекулярной» химической реакции:



Реальной, но более сложной химической реакцией, обладающей сходными свойствами, является реакция Белоусова-Жаботинского. При **больших** значениях коэффициентов диффузии D_i пространственной неоднородностью концентраций можно пренебречь, и модель (9) сводится к модели (8). Название **брюсселятор** по имени города, где работали Пригожин и Лефевр, дано этой системе в 1973 г. [Т73]. Теория распределенного брюсселятора (9) подробно изложена в монографии [НП79]

[PL68] Prigogine I., Lefever R. Symmetry breaking instabilities in dissipative systems. II. J. Chem. Phys., vol. 48, no. 4, pp. 1695-1700 (1968).

[Т73] Tyson J. Some further studies of nonlinear oscillations in chemical systems. J. Chem. Phys., vol. 58, no. 9, pp. 3919-3930 (1973).

[ГП73] Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. - М.: Мир, 1973. - 280 с.

[НП79] Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. М.: Мир, 1979. - 512 с.

Диссипация брюсселятора

$$\Lambda(x, y) = b + 1 - 2xy + x^2 \quad (11)$$

отрицательна в области, лежащей над кривой C , заданной уравнением

$$y = \frac{x}{2} + \frac{b+1}{2x}, \quad (12)$$

и положительна под этой кривой.

◆ Уравнения (8) имеют одну неподвижную точку с координатами

$$x_0 = a, \quad y_0 = \frac{b}{a} \quad (13)$$

Тип этой точки определяется значением величины управляющего параметра

$$\mu = b - 1 - a^2. \quad (14)$$

Обычно значение a фиксируют и считают управляющий параметр функцией b .

Неподвижная точка (13) является устойчивым узлом при $\mu < -2a$, устойчивым фокусом при $-2a < \mu < 0$, неустойчивым фокусом при $0 < \mu < 2a$ и неустойчивым узлом при $2a < \mu$. Заметим, что изменению устойчивости неподвижной точки соответствует изменение знака локальной диссипации $\Lambda(x, y)$ в неподвижной точке; это свойство является общим. При положительных значениях μ брюсселятор (8) обладает предельным циклом. Исследование свойств предельного цикла брюсселятора требует громоздких вычислений, поэтому мы не будем их рассматривать.

◆ Еще одним примером модели, обладающей предельным циклом, является *осциллятор Рэля* - модель с уравнением движения

$$\ddot{x} - \alpha \dot{x}(1 - \dot{x}^2) + x = 0 \quad (15)$$

(динамическими переменными являются x и \dot{x}) и одним управляющим параметром $\alpha > 0$.

✧ Эта модель была построена Дж.В. Стреттом, лордом Рэлеем (J.W. Strutt, third Baron Rayleigh) в 1877 г. [С55, с.101] для демонстрации возможности существования в автономной системе незатухающих колебаний, форма которых не зависит от начальных условий. Рэлей построил приближенный вид предельного цикла системы (8) при $\alpha \ll 1$. Доказательство существования у осциллятора Рэля предельного цикла при любых α было получено А.Г. Майером в 1935 г. [М35].

[С55] Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей) Теория звука. т.1. М.: ГТТИ, 1955. - 503 с.

[М35] Майер А.Г. "Доказательство существования предельных циклов у уравнений Рэля и Ван дер Поля." Учен. записки ГГУ, 1935, вып. 2.

Наиболее распространенная в современной литературе модель осциллятора с предельным циклом - *осциллятор Ван дер Поля* с уравнением движения

$$\ddot{z} - \alpha \dot{z}(1 - z^2) + z = 0 \quad (16)$$

эквивалентна осциллятору Рэля, так как уравнение (16) получается из (15) дифференцированием по времени и последующей заменой переменных $z = \sqrt{3}\dot{x}$.

✧ Эта модель была введена Б. Ван дер Полем в 1920 г. [VdP20, ВдП35, с.11] для описания электрических колебаний в триодном генераторе с контуром в анодной цепи. Величина z

имеет в физической модели-прототипе смысл переменной части анодного напряжения. В своих работах Ван дер Поль не ссылается на Рэлея.

[VdP20] Van der Pol B. A theory of the amplitude of free and forced vibrations. Radio Review, 1920, vol. 1, pp. 701-754.

[ВдП35] Ван-дер-Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний. М.: Гос. изд-во по технике связи. - 1935. - 42 с.

◆ Перепишем уравнение (15) в виде системы уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \alpha y(1 - y^2) - x. \quad (17)$$

Эта система инвариантна при замене переменных $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$. Поэтому все фазовые траектории инвариантны при инверсии координат.

Единственная неподвижная точка системы (17) - начало координат - неустойчива при любых $\alpha > 0$. Рассмотрим эволюцию расстояния фазовой точки от начала координат - величины $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. Из уравнений (17) следует

$$\frac{dR^2}{dt} = 2\alpha y^2(1 - y^2). \quad (18)$$

Правая часть положительна внутри полосы $|y| < 1$. Следовательно, если в начальный момент фазовая точка находилась от начала координат на расстоянии $R < 1$ - то с течением времени расстояние будет увеличиваться, и точка покинет окружность единичного радиуса **навсегда**. Таким образом, если у системы есть предельный цикл, то он не имеет точек внутри окружности единичного радиуса.

§ 03 Свойства автоколебаний осциллятора Релея при $\alpha \ll 1$

◆ Если значение управляющего параметра α мало, $\alpha \ll 1$, то осциллятор Рэлея может быть описан как линейный осциллятор, находящийся под действием малого возмущения:

$$\ddot{x} + x = \alpha \dot{x}(1 - \dot{x}^2). \quad (19)$$

В этом случае - который называется **томсоновским** - автоколебания осциллятора будут близки к гармоническим колебаниям.

✧ Термин «**томсоновский случай**» известен по крайней мере с 1939 г. [Т39], употребляется только в отечественной литературе и кажется странным, ибо ни один из великих Томсонов теорией автоколебаний не занимался. Эксперты объясняют его происхождение так: в этом случае поведение системы близко к поведению гармонического осциллятора – например, идеального колебательного контура, частота колебаний которого описывается формулой Томсона $\Omega = \sqrt{LC}$ (C - емкость конденсатора, L - индуктивность соединяющего его пластины линейного проводника пренебрежимо малого сопротивления).

[Т39] Теодорчик К.Ф. Энергетическое рассмотрение систем томсоновского типа. ЖТФ, 1939, т.9, в.11, с.1005.

◆ Если пренебречь пропорциональным α членом в уравнениях, то система (19) перейдет в гармонический осциллятор с единичной частотой свободных колебаний. Его закон движения может быть представлен в виде

$$x(t) = A \cos t. \quad (20)$$

Рассмотрим движение системы, учтя, что значение α конечно и положительно. Будем описывать движение системы модулированным гармоническим колебанием с законом

$$x(t) = A(t) \cos(t + \Theta(t)) \equiv A(t) \cos \varphi, \quad (21)$$

где $A(t)$ и $\Theta(t)$ - медленно меняющиеся функции времени ($\dot{A}, \dot{\Theta} \sim \varepsilon \ll 1$). Подставляя решение (21) в уравнение (22) и пренебрегая членами второго порядка по ε ($\ddot{A}, \dot{A}\dot{\Theta}, \ddot{\Theta}, \dot{\Theta}^2$), получим уравнение:

$$-\dot{A} \sin \varphi - 2A\dot{\Theta} \cos \varphi = \alpha A \sin \varphi (1 - A^2 \sin^2 \varphi). \quad (23)$$

Умножая это уравнение на $\sin \varphi$ и усредняя по периоду движения, с учетом значений

$$\overline{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{2}; \quad \overline{\sin^4 \varphi} = \frac{3}{8}, \quad (24)$$

получаем

$$\dot{A} = \alpha A \left(1 - \frac{3}{4} A^2 \right). \quad (25)$$

Это уравнение (оно рассматривалось ранее – см. V03.1, пример 3) имеет одну устойчивую точку

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (26)$$

Умножая уравнение (22) на $\cos \varphi$ и усредняя по периоду, получаем $\dot{\Theta} = 0$, что означает отсутствие поправок к частоте движения в первом порядке по α .

Таким образом, при малых α предельный цикл осциллятора Рэля на фазовой плоскости близок к **окружности** радиуса $A = 2/\sqrt{3}$; этот цикл устойчив, а автоколебательное движение может быть описано как гармоническое колебание с единичной частотой.

Для осциллятора Ван дер Поля устойчивый предельный цикл близок к окружности радиуса $A = 2$.

◆ Рассмотрим автоколебания в томсоновском случае с точки зрения баланса энергии системы. Правую часть уравнения (19) можно рассматривать как выражение для малой вынуждающей силы F , действующей на гармонический осциллятор. Мощность этой силы

$$P = F\dot{x} = \alpha \dot{x}^2 (1 - \dot{x}^2). \quad (26)$$

Вычислим работу Q , совершаемую этой силой за период колебаний:

$$Q = \int_0^{2\pi} \alpha (A^2 \sin^2 t - A^4 \sin^4 t) dt = \frac{\alpha}{2} A^2 \left(1 - \frac{3}{4} A^2 \right). \quad (27)$$

Потребовав, чтобы работа за период обращалась в ноль, $Q = 0$, находим нетривиальное значение амплитуды периодического движения $A = 2/\sqrt{3}$ в согласии с выражением (25).

◆ Найдем поправку к частоте автоколебаний осциллятора Релея в томсоновском случае. Зависимость частоты от управляющего параметра $\Omega(\alpha)$ можно связать с ангармонизмом движения, а эквивалентность осцилляторов Рэлея и Ван дер Поля позволяет искать эту зависимость для второго из них.

Начнем с важной леммы («точка-тире теоремы»): **если** система совершает периодическое движение, **то** среднее по периоду значение производной по времени любой функции динамических переменных равно нулю:

$$\overline{\dot{z}} = 0 \quad (28)$$

Доказательство:

$$\overline{\dot{z}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \dot{z} dt = \frac{1}{T} (z(t+T) - z(t)) = 0 \quad (29)$$

в силу условия периодичности движения. ■

Умножая уравнение движения осциллятора Ван дер Поля

$$\ddot{z} - \alpha \dot{z}(1 - z^2) + z = 0 \quad (30)$$

на z , усредняя по времени и используя (28), получаем соотношение:

$$\overline{\dot{z}^2} = \overline{z^2} \quad (31)$$

Средние значения квадрата динамической переменной z и квадрата ее скорости равны при любых значениях параметра α . Представим теперь решение уравнения (30) в виде периодического движения

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \quad (32)$$

где Ω - неизвестная частота автоколебаний. Подстановка этого выражения в соотношение (31) приводит к (точному) равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 n^2 \Omega^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2. \quad (33)$$

Считая колебания слабо ангармоничными, можно записать приближенное выражение квадрата частоты через Фурье-амплитуды

$$\Omega^2 \approx 1 - \frac{1}{A_1^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1) A_n^2 \quad (34)$$

С ростом ангармонизма автоколебаний осциллятора Ван дер Поля частота автоколебаний уменьшается.

Считая в низшем приближении движение гармоническим, а частоту $\Omega \approx 1$, в нулевом приближении имеем $z_1(t) \approx A_1 \cos t = 2 \cos t$. Подставляя это выражение в правую часть уравнения $\ddot{z} + z = \alpha \dot{z}(1 - z^2)$ и выделяя в ней третью гармонику (которая дает основной вклад в ангармонизм колебаний), получаем для поправки первого приближения

$$\ddot{\xi} + \xi = -\alpha \frac{A_1^3}{4} \sin 3t \quad (35)$$

откуда $A_3 \approx \alpha A_1^3 / 32 \approx \alpha / 4$. В итоге получаем зависимость частоты от управляющего параметра:

$$\Omega(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{16}. \quad (36)$$

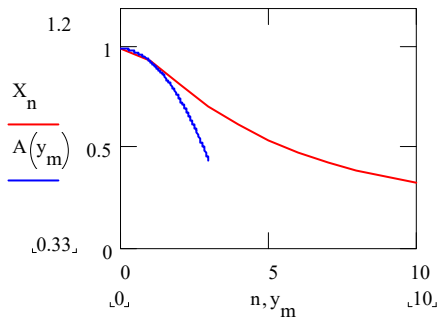


Рис. V06.4

Зависимость частоты автоколебаний осциллятора Рэля от параметра α . Сплошная линия - численный расчет, штриховая линия по приближенной формуле (36).

