

V05 ДВУМЕРНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Перейдем к рассмотрению **периодических** движений в двумерных автономных системах. Фазовые траектории периодических движений представляют собой замкнутые кривые на фазовой плоскости. Такие кривые могут образовывать семейства, сплошь заполняющие некоторую часть фазовой плоскости – или быть изолированными. Начнем с первого случая, который свойственен интегрируемым двумерным системам.

§ 01 Консервативные интегрируемые (гамильтоновы) системы

◆ Если для двумерной динамической системы

$$\dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y) \quad (1)$$

существует функция динамических переменных $E(x, y)$, сохраняющая при движении свое значение:

$$\dot{E}(x, y) = 0 \quad (2)$$

то эта функция называется **интегралом движения**, а система (1) – **интегрируемой системой**. Фазовые траектории интегрируемой системы представляют собой линии уровня интеграла движения. В общем случае такие линии либо замкнуты, либо уходят на бесконечность. Таким образом, типичное финитное движение интегрируемой системы является периодическим. Основной задачей теории является определение частоты колебаний от величины интеграла движения $\Omega = \Omega(E)$.

◆ К интегрируемым системам с двумерным фазовым пространством относятся гамильтоновы автономные системы с одной степенью свободы, для которых уравнения движения имеют вид

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (3)$$

Системы такого типа консервативны: диссипация (см. V02.3) равна нулю во всех точках фазового пространства. Значение функции Гамильтона $H(p, q) = E$ называется **энергией**; энергия является интегралом движения:

$$\dot{E} = \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} = 0 \quad (4)$$

◆ Для любых автономных гамильтоновых систем с одной степенью свободы матрица устойчивости (см. V04.1) имеет вид

$$\hat{M}(p, q) = \begin{vmatrix} -H_{pq} & -H_{pp} \\ H_{qp} & H_{qq} \end{vmatrix} \quad (5)$$

След S этой матрицы равен нулю, как и сумма характеристических показателей: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Поэтому для автономных гамильтоновых систем в фазовом пространстве возможны неподвижные точки **только двух** типов – центры

$(\operatorname{Re} \lambda_i = 0, \lambda_1 = \lambda_2^*)$ или седла $(\operatorname{Im} \lambda_i = 0)$ с равными по модулю характеристическими показателями.

◆ Закон сохранения энергии (4) часто позволяет понизить порядок гамильтоновой динамической системы, описав ее с помощью уравнения первого порядка. Так, функция Гамильтона $H(p, q)$, описывающая одномерное движение частицы массы m в потенциальном поле $U(q)$ [ЛП, §40], имеет вид

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + U(q) \quad (6)$$

Разрешив уравнение $H(p, q) = E$ относительно p и используя второе из канонических уравнений (3), получаем пару уравнений первого порядка

$$\dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}. \quad (7)$$

К этому же результату можно прийти, интегрируя уравнение движения частицы в потенциале $U(q)$:

$$m\ddot{q} = -\frac{dU(q)}{dq}. \quad (8)$$

Точки, в которых правые части уравнений (7) обращаются в ноль, называются *точками остановки*. Если в точке остановки $dU/dq \neq 0$, то она называется *точкой поворота*. Фазовый портрет движения в потенциале $U(q)$ строится элементарно: минимумы потенциала соответствуют центрам, максимумы – седлам.

✧ **Задача 05.1** Найти закон движения вблизи точки остановки q_s , если она не является точкой поворота.

✧ Форма гамильтониана (6) является весьма распространенной, но все же не универсальной. Могут встретиться гамильтонианы, в которых кинетическая энергия $T(p)$ выражается сложной функцией, так что импульс не удастся явно выразить через координату подобно (7). Интегрируемость системы и возможность проинтегрировать уравнения ее движения в квадратурах – не синонимы.

Если область движения ограничена точками поворота $q_L < q_R$, то движение системы периодически, а его период $T(E)$ дается выражением

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{q_L}^{q_R} \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}} \quad (9)$$

Частота движения,

$$\Omega(E) = \frac{2\pi}{T(E)}, \quad (10)$$

как правило зависит от энергии. Важнейшее исключение представляет *гармонический осциллятор* – система с гамильтонианом

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2} q^2 \quad (11)$$

Для него при любых начальных условиях частота движения постоянна и равна Ω ; это свойство гармонического осциллятора называется **изохронностью**.

✧ **Задача 05.2** Доказать, что для одномерного движения частицы в потенциальном поле

$$U(x) = U_0 \left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a} \right)^2 \quad (12)$$

период движения не зависит от энергии – существует изохронность.

§ 02 Стандартные модели

◆ Важнейшей стандартной моделью нелинейной консервативной интегрируемой системы является маятник. **Маятником (pendulum)** называется гамильтонова система с одной степенью свободы с (безразмерными) каноническими переменными - импульсом p и координатой φ и гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2} - \cos \varphi \quad (13)$$

✧ Координата φ рассматривается как угловая: состояния системы, различающиеся по φ на 2π , считаются совпадающими. Фазовое пространство системы представляет собой цилиндр $(-\infty < p < \infty) \times (-\pi \leq \varphi < \pi)$.

Уравнения движения маятника имеют вид

$$\dot{p} = -\sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = p \quad (14)$$

Система имеет две неподвижные точки - центр $\varphi = 0, p = 0$, соответствующий энергии $E = -1$, и седло $\varphi = \pm\pi, p = 0$, соответствующее энергии $E = 1$. Сепаратриса седла представляет собой линию уровня гамильтониана, соответствующую энергии $E = 1$. Уравнение сепаратрисы имеет вид

$$p_s(\theta) = \pm \cos \frac{\varphi}{2} \quad (15)$$

Почти при всех начальных условиях движение маятника периодически. При $E < 1$ движение маятника ограничено точками поворота, и называется **качанием (libration)**. При $E > 1$ состояния маятника периодически повторяются, но скорость изменения координаты имеет постоянный знак. Такое движение маятника называется **вращением (rotation)**.

✧ Маятник важен тем, что дает простейший пример системы, обладающей неподвижными точками обеих возможных типов - одним центром и одним седлом - и удобен для исследования движений в окрестности сепаратрисы седла. Во-вторых, модель маятника имеет простые и наглядные физические прототипы. В третьих, модель маятника является универсальным инструментом для описания *консервативного нелинейного резонанса* в задачах о движении консервативных систем под действием гармонической внешней силы.

◆ Вторым важнейшим набором моделей нелинейных консервативных систем являются осцилляторы Дуффинга. **Осцилляторами Дуффинга** мы будем называть модели с уравнениями движения любого из следующих видов:

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0, \quad (16)$$

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0, \quad (17)$$

$$\ddot{x} - x + x^3 = 0, \quad (18)$$

и обозначать их как D_{1+} , D_{1-} и D_2 соответственно.

✧ В своем мемуаре [D18] Дуффинг рассматривал свойства неавтономной системы с уравнением движения

$$\ddot{x} + \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 = k \sin \omega t \quad (19)$$

где параметры β и γ малы в сравнении с α . При этом основное внимание было уделено "симметричному случаю" $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$. В настоящее время термины "уравнение Дуффинга" и "осциллятор Дуффинга" утратили четкие границы: чаще всего их применяют к уравнениям (16-18) и их диссипативным обобщениям (с добавлением в левую часть члена " $2\gamma\dot{x}$ ", описывающего затухание) без предположений о малости параметров при нелинейных членах.

[D18] Duffing G. Erzwungene Schwingungen ber veranderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Sammlung Vieweg., Braunschweig, 1918. - VI+134 S.

✧ Модели осцилляторов Дуффинга и их обобщения, возникающие при замене консервативной системы на систему с малым затуханием, используются в теории колебаний как примеры типичных нелинейных осцилляторов. Две из этих моделей имеют универсальное значение как модели умеренной нелинейности, в которых в разложении потенциальной энергии вблизи минимума сохраняются не только квадратичные члены (что соответствует линейаризации уравнений движения), но и следующие за ними квартичные. В частности, моделью D_{1-} может быть описано движение маятника при умеренной амплитуде колебаний.

◆ Для маятника и осцилляторов Дуффинга зависимость частоты движения от энергии $\Omega(E)$ может быть выражена через специальные функции (полные эллиптические интегралы). Польза от этого представления невелика: зависимость $\Omega(E)$ может быть найдена непосредственным численным интегрированием быстрее, чем поиском значений эллиптических интегралов в таблицах.

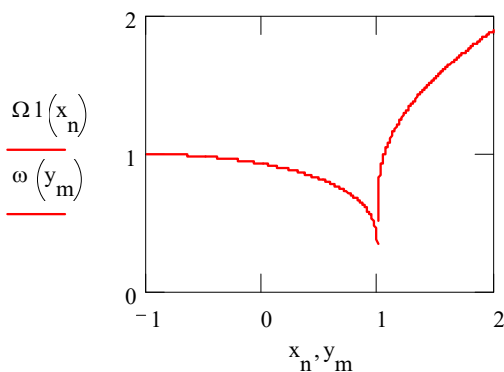


Рис. V05.1
Зависимость частоты колебаний маятника от его энергии.

Большее значение имеет определение приближенных зависимостей $\Omega(E)$ в асимптотических областях – при значениях E вблизи минимума потенциала ($E \approx -1$ для маятника; случай малых колебаний) и вблизи седлового ($E \approx 1$ для

маятника). Методы отыскания этих зависимостей могут быть использованы и для других моделей.

✧ Отметим, что решения уравнений движения стандартных моделей при любых начальных условиях могут быть выражены через эллиптические функции Якоби – как для маятника [ЗС88, с.18], так и для осцилляторов Дуффинга [Д97, с.80].

[Д97] Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. - 496 с.

[ЗС88] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М., Наука, 1988. - 368 с.

§ 03 Частота малых колебаний

◆ Рассмотрим частоту малых колебаний $E \ll 1$ для осциллятора Дуффинга D_{1+}

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0, \quad (16)$$

Поскольку амплитуды всех гармоник, кроме основной, в этом случае малы (см. V01), традиционным и удобным способом описания является выражение характеристик движения не через энергию, а через амплитуду основной фурье-компоненты движения $a_1 \equiv A$.

◆ Рассмотрим *метод оптимальной линеаризации*. Аппроксимируем уравнение движения осциллятора Дуффинга уравнением движения гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0 \quad (20)$$

с подлежащей определению частотой Ω . Потребуем, чтобы среднее значение квадрата разности $\Delta(\Omega)$ сил, входящих в нелинейное уравнение (16) и линейное уравнение (20), было минимально. Выражение для $\Delta(\Omega)$ имеет вид

$$\overline{(\Omega^2 x - x - x^3)^2} \equiv \Delta(\Omega) = \beta^2 \overline{x^2} - 2\beta \overline{x^4} + \overline{x^6} \quad (21)$$

где $\beta = \Omega^2 - 1$, а горизонтальная черта обозначает усреднение по времени (или по периоду). Минимуму $\Delta(\Omega)$ соответствует значение

$$\Omega^2 = 1 + \overline{x^4} \cdot (\overline{x^2})^{-1} \quad (22)$$

Будем считать движение $x(t)$ гармоническим колебанием с амплитудой A :

$$x(t) = A \sin \Omega t \quad (23)$$

Тогда для средних значений, входящих в формулу (22), получаем

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2} A^2, \quad \overline{x^4} = \frac{3}{8} A^4 \quad (24)$$

и окончательно получаем выражение для частоты колебаний как функции (малой) амплитуды:

$$\boxed{\Omega \approx 1 + \frac{3}{8} A^2} \quad (25)$$

Учитывая, что при малых значениях энергии осциллятор Дуффинга мало отличается от гармонического осциллятора, можно положить $E \approx A^2/2$ и получить зависимость частоты от полной энергии в виде

$$\Omega \approx 1 + \frac{3}{4} E \quad (26)$$

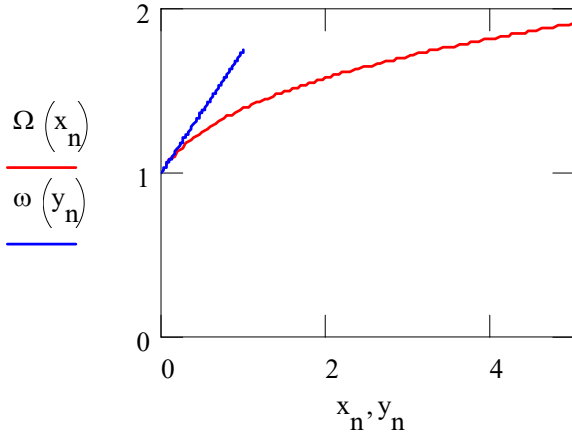


Рис. V05.2

Зависимость частоты колебаний осциллятора Дуффинга D_{1+} от его энергии. Штриховой линией показана асимптотика при малых энергиях (26).

◆ Рассмотрим другой подход к выводу выражения (26), основанный на **методе исключения резонанса**. Представим уравнение движения осциллятора Дуффинга (16) в виде

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = (\Omega^2 - 1)x - x^3 \quad (27)$$

где Ω - частота колебаний, подлежащая определению. Будем считать движение $x(t)$ гармоническим колебанием с небольшой амплитудой $A \leq 1$:

$$x(t) = A \sin \Omega t. \quad (28)$$

Подставляя это выражение в правую часть уравнения (27), получаем уравнение

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = A \left(\Omega^2 - 1 - \frac{3}{4} A^2 \right) \sin \Omega t - \frac{1}{4} A^3 \sin 3\Omega t \quad (29)$$

Движение гармонического осциллятора с собственной частотой Ω под воздействием гармонической силы с той же частотой описывается квазигармоническим движением с линейно растущей амплитудой (см. V01.3, формула (23)). Движение двумерной интегрируемой системы (16) всегда периодически. Уравнение (29) будет иметь при любых начальных условиях решением периодическую функцию только в том случае, когда выражение для вынуждающей силы не будет содержать первой гармоники. Приравнявая коэффициент при $\sin \Omega t$ нулю, получаем для частоты выражение

$$\boxed{\Omega \approx 1 + \frac{3}{8} A^2} \quad (30)$$

Уравнение (29) позволяет также уточнить закон движения $x(t)$, учтя в нем компоненту третьей гармоники:

$$x(t) = A \sin \Omega t + \frac{1}{32} A^3 \sin 3\Omega t \quad (31)$$

Таким образом, при малых амплитудах колебаний (малых значениях энергии $E \ll 1$) коэффициент ангармонизма колебаний осциллятора Дуффинга

$$\nu \approx \frac{1}{1024} A^4 \approx \frac{1}{256} E^2 \quad (32)$$

растет пропорционально четвертой степени амплитуды колебаний, или квадрату энергии.

§ 04 Движение вблизи сепаратрисы

◆ Из четырех описанных выше моделей три (маятник и осцилляторы Дуффинга D_1 и D_2) имеют седловые точки и сепаратрисы. Эти седла соответствуют неустойчивым положениям равновесия частицы в точке максимума потенциальной энергии. Рассмотрим движение системы при энергии, близкой к седловому значению. Совместим начало координат с точкой максимума, а максимум потенциала примем за начало отсчета энергии: $\max U(x) = 0$. Будем рассматривать движение в области $x > 0$ с малой **отрицательной** энергией $\varepsilon < 0$ ($|\varepsilon| \ll 1$).

В окрестности максимума потенциальную энергию можно разложить до квадратичного члена ($U(x) = -\kappa^2 x^2/2$) и описать движение системы моделью гиперболического акселератора (гармонического осциллятора с мнимой частотой):

$$\ddot{x} - \kappa^2 x = 0. \quad (33)$$

Возьмем момент остановки частицы вблизи седла за начало отсчета времени. Соответствующее решение уравнения движения (33) будет иметь вид

$$x(t) = \frac{\sqrt{2|\varepsilon|}}{\kappa} \operatorname{ch} \kappa t. \quad (34)$$

Выберем точку A , находящуюся на таком расстоянии от максимума потенциала, чтобы в ней можно было пользоваться уравнением (33), но чтобы $|U(x)| \gg |\varepsilon|$ (см. рис. V05.3). Время достижения точки A можно найти из (34):

$$T_1(A) \approx \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{2\kappa^2}{|\varepsilon|} + \frac{1}{\kappa} \ln A. \quad (35)$$

Для описания движения справа от точки A можно (в силу условия $|U(x)| \gg |\varepsilon|$) воспользоваться законом движения на сепаратрисе. Решая уравнение (33) при $\varepsilon = 0$, получаем закон движения частицы, которая в момент времени $t = -\infty$ вышла из седловой точки:

$$x_s(t) = Ae^{\kappa(t-T_1)}. \quad (36)$$

Минимума потенциала на расстоянии M от его максимума (где M – константа, зависящая от вида потенциала) частица достигнет через интервал времени

$$T_2(A) \approx \frac{1}{\kappa} \ln \frac{M}{A}. \quad (37)$$

Складывая выражения (35) и (37), получаем уже не зависящее от выбора A выражение для интервала времени движения от точки поворота до минимума потенциала

$$T \approx \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{2\kappa^2 M^2}{|\varepsilon|}. \quad (38)$$

Этот интервал – а вместе с ним и период движения – логарифмически растет с уменьшением отклонения энергии от седлового значения.

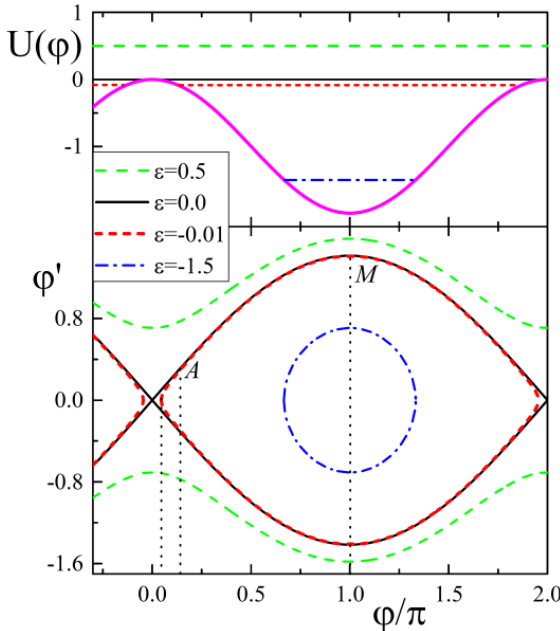


Рис. V05.3

Фазовый портрет математического маятника. Показаны фазовые траектории, соответствующие качаниям (синий штрих-пунктир), качению (зеленый пунктир), сепаратрисе (черная сплошная линия) и качаниям вблизи сепаратрисы (красный короткий пунктир). На верхнем графике показан профиль потенциала и линии уровня энергии, соответствующие фазовым траекториям.

✧ Безусловно, приближение системы моделью гармонического акселератора (33) неприменимо в области минимума потенциала. Однако так как система очень медленно движется в области поворота вблизи седловой точки, а область минимума потенциала проходит намного быстрее, то полученное выражение (38) асимптотически верно при значениях энергии, близких к седловому значению.

Совершенно аналогично можно показать, что ту же величину имеет интервал времени движения от максимума потенциала ($x = 0$) до минимума потенциала для случая, когда частица имеет малую **положительную** энергию $1 \gg \varepsilon > 0$. Таким образом, для систем с квадратичным максимумом потенциала частота движения как функция малого отклонения энергии от седлового значения обращается в ноль по **логарифмическому закону**:

$$\Omega(\varepsilon) \sim \ln \frac{1}{|\varepsilon|}. \quad (39)$$

✧ **Пример 1.** Для маятника значение $\kappa = 1$. Закон движения маятника на сепаратрисе легко найти из решения уравнения

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \cos \varphi = 1. \quad (40)$$

После интегрирования получаем

$$\varphi(t) = 4 \operatorname{arctg} e^t. \quad (41)$$

За время от $-\infty$ до $+\infty$ положение маятника меняется на 2π , а константа интегрирования выбрана так, что в нулевой момент времени система находится в минимуме потенциала $\varphi(0) = \pi$. Тогда в момент $-T_2(A)$ система находилась в точке A :

$$A = 4 \operatorname{arctg} e^{-T_2(A)}. \quad (42)$$

Подставляя выражение (37) и учитывая, что $A/M \ll 1$, получаем $M = 4$. Из (38) находим асимптотику периода колебаний ($\varepsilon < 0$):

$$T_l \approx 2 \ln \frac{32}{|\varepsilon|} \quad (43)$$

(интервал от точки поворота до минимума проходится **четырежды**) и асимптотику периода вращений ($\varepsilon > 0$):

$$T_l \approx \ln \frac{32}{\varepsilon} \quad (44)$$

(интервал от максимума до минимума потенциала проходится **дважды**).

◆◆ Для двумерной автономной интегрируемой системы основной задачей является определение зависимости частоты движения от начальных условий и параметров.

Использование квадратуры (9) редко бывает лучшим способом ее решения.

Для исследования движений вблизи центра эффективно использование модели слабо ангармонического движения.

Для исследования движений, проходящих вблизи седла, эффективна аппроксимация законом движения на сепаратрисе.

