

V04 ДВУМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Теория двумерных систем составляет ядро теории колебаний, так как только в двумерных автономных системах возможны колебания в обычном смысле слова – движения, характеризующиеся определенной повторяемостью состояний системы и описываемые кинематическими моделями, перечисленными в первой лекции.

§ 01 Неподвижные точки двумерных систем

◆ Рассмотрим двумерную автономную динамическую систему с уравнениями движения

$$\dot{x} = F(x, y); \quad \dot{y} = G(x, y) \quad (1)$$

Фазовое пространство системы (1) обычно представляет собой фазовую плоскость $\{x, y\}$. Изображение на этой плоскости исключительных фазовых траекторий системы (неподвижных точек, сепаратрис седел и предельных циклов) вместе с несколькими типичными траекториями общего вида составляет **фазовый портрет** динамической системы, который дает наглядное качественное представление о характере движений при различных начальных условиях.

❖ Уточним: фазовое пространство системы (1) может иметь топологию цилиндра $R_1 \times S_1$ (пример – маятник) или тора $S_1 \times S_1$. В таких случаях на фазовой плоскости могут быть показаны развертки этих поверхностей.

◆ Поделив уравнения (1) друг на друга, получим уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}. \quad (2)$$

Однако далеко не всегда возможно найти решение этого дифференциального уравнения. Иногда для построения фазового портрета можно использовать метод **изоклинов**. Изоклины называются кривые, определяемые условием:

$$\frac{G(x, y)}{F(x, y)} = K. \quad (3)$$

Вдоль кривой, определяемой уравнением (3), наклон фазовых траекторий постоянен. Если возможно построить семейство изоклинов с различными значениями K , построение фазовых траекторий существенно упрощается.

Однако в общем случае определение структуры фазовой плоскости, а в особенности отыскание атTRACTоров с периодическим движением – предельных циклов – представляет весьма сложную задачу.

❖ "...Вопрос о максимальном числе и о расположении предельных циклов Пуанкаре для дифференциального уравнения первого порядка и первой степени вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X} \quad (4)$$

где X, Y - целые рациональные функции n -й степени относительно x, y " составляет 16-ю проблему Гильберта [ПГ69, с.47], поставлен около 100 лет назад и до сих пор в общем виде не решен.

[ПГ69] Проблемы Гильберта. Сборник под ред. П.С. Александрова. М., Наука, 1969. - 240 с.

Методы исследования систем на фазовой плоскости собраны в справочнике [БЛ90]. Исследование неподвижных точек представляет самую простую часть задачи.

[БЛ90] Баутин Н.А., Леонович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. 2-е изд. М., Наука, 1990. - 488 с.

◆ Обратимся к рассмотрению неподвижных точек \vec{x}_o системы (1). Они определяются корнями системы уравнений

$$F(x_o, y_o) = 0; \quad G(x_o, y_o) = 0 \quad (5)$$

и в типичных случаях являются изолированными.

Аппарат для исследования устойчивости неподвижных точек сформулируем в общем виде. Пусть система уравнений движения динамической системы в K -мерном фазовом пространстве имеет вид

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}). \quad (6)$$

Матрицей устойчивости (stability matrix) $\hat{M}(\vec{x})$ динамической системы (6) в точке фазового пространства \vec{x} называется квадратная матрица $K \times K$ с элементами

$$M_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad (5)$$

причем значения всех производных берутся в точке \vec{x} . Собственные значения матрицы устойчивости $\hat{M}(\vec{x})$ называются **локальными характеристическими показателями** $\lambda_n(\vec{x})$ динамической системы. Совокупность K таких показателей задает **спектр** матрицы устойчивости.

Если точка \vec{x}_o является неподвижной, то ее устойчивость в линейном приближении определяется спектром характеристических показателей. Рассмотрим движение системы вблизи неподвижной точки \vec{x}_o . Положим $\vec{x} = \vec{x}_o + \vec{\xi}$, подставим это выражение в уравнения движения (4), разложим $\vec{F}(\vec{x})$ в ряд Тейлора по компонентам $\vec{\xi}$ и пренебрежем всеми членами, кроме линейных по ξ_i . Уравнения движения для компонент отклонения $\vec{\xi}$ будут иметь вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^K M_{ij} \xi_j. \quad (8)$$

В типичном случае невырожденного спектра матрицы устойчивости (все λ_i различны) общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$\xi_i(t) = \sum_{n=1}^K A_{in} e^{\lambda_n t} \quad (9)$$

Если среди локальных характеристических показателей данной неподвижной точки есть хотя бы **один с положительной** вещественной частью, то при начальных условиях общего вида компоненты отклонения будут нарастать со временем, и неподвижная точка будет **неустойчива**.

◆ Вернемся к рассмотрению двумерных систем. Линеаризованную систему уравнений для отклонений от неподвижной точки можно в этом случае записать в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta \quad (10)$$

где через a, b, c и d обозначены вещественные элементы матрицы устойчивости. Собственные значения матрицы устойчивости выражаются через эти коэффициенты так:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc} \quad (11)$$

Выражению (11) можно придать более простой вид, введя **след** S матрицы устойчивости - сумму диагональных матричных элементов

$$S = M_{11} + M_{22} = a + d \quad (12)$$

(след матрицы устойчивости равен значению локальной диссипации в неподвижной точке (см. V02, §03): $S = \Lambda(\vec{x}_o)$) и **определитель** D матрицы устойчивости

$$D = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = ad - bc. \quad (13)$$

Собственные значения матрицы устойчивости выражаются через эти величины так:

$$\lambda_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - D}. \quad (14)$$

Отсюда вытекает, что сумма характеристических показателей равна следу матрицы устойчивости: $\lambda_1 + \lambda_2 = S$, а их произведение – определителю: $\lambda_1 \lambda_2 = D$.

§ 02 Классификация неподвижных точек

◆ Неподвижные точки двумерных систем классифицируются по свойствам их локальных характеристических показателей.

Неподвижная точка, в которой показатели λ_i чисто мнимые, называется **центром (centre)**. В окрестности центра фазовые траектории образуют семейство эллипсов.

Неподвижная точка, в которой показатели имеют отличные от нуля мнимые части и ненулевую действительную часть, называется **фокусом (focus)**. Если $S < 0$, то фокус является устойчивым, а если $S > 0$, то неустойчивым. В окре-

стности фокуса фазовые траектории образуют семейство логарифмических спиралей.

Неподвижная точка, в которой показатели действительны и имеют разные знаки, называется **седлом (saddle)** или седловой точкой. В окрестности седла фазовые траектории образуют семейство гипербол.

Вблизи седла существуют фазовые траектории, по которым фазовая точка при $t \rightarrow \infty$ или при $t \rightarrow -\infty$ неограниченно приближается к седловой точке. Эти фазовые траектории называются **устойчивыми и неустойчивыми ветвями сепаратрисы** седла соответственно. Все такие ветви (иногда - с добавлением к ним самой неподвижной точки) объединяются под названием **сепаратрисы (separatrix)**. Сепаратрисы седловых точек составляют третью группу исключительных фазовых траекторий вместе с неподвижными точками и изолированными замкнутыми фазовыми траекториями - предельными циклами (см. V02, §04, п.3).

◆ Сепаратрисы играют важную роль в качественном исследовании структуры фазовой плоскости двумерных динамических систем. Свойство сепаратрис разделять фазовую плоскость на области, "соответствующие движениям различного характера", иногда принимается за их определение [ММ+88, с.21]. Да и сам термин "сепаратриса" восходит к латинскому *separare* - "разделять". Однако данное выше определение седла и его сепаратрис сохраняет смысл и в многомерных системах, при $K \geq 3$. Одномерные множества - сепаратрисы - при этом не разделяют никаких K -мерных областей.

Неподвижная точка, в которой показатели действительны и имеют одинаковые знаки, называется **узлом (node)**. Если $S < 0$, то узел является устойчивым, а если $S > 0$, то неустойчивым. В окрестности узла фазовые траектории образуют семейство прямых.

◆ На плоскости параметров $\{S, D\}$ равенство нулю действительной части характеристических показателей неподвижной точки, как видно из выражения (12), возможно только на прямой $S = 0$, которая имеет нулевую площадь.

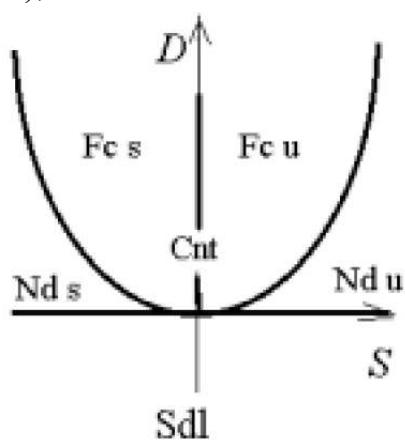


Рис. V04.1

Границы областей различных типов неподвижных точек двумерных автономных динамических систем на плоскости параметров $\{S, D\}$ (S - след, D - детерминант матрицы устойчивости).

Таким образом, для систем общего вида точки типа центр встречаются исключительно редко. Необходимость их рассмотрения в теории колебаний связана с тем, что они являются типичными для консервативных систем, в которых **по определению** $S = 0$. Неподвижные точки двумерных консервативных систем суть либо центры, либо седла.

- ◆ Выбором масштаба времени для системы уравнений (10) можно обеспечить выполнение условия

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \quad (15)$$

Таким преобразованием пространство неподвижных точек отображается на поверхность четырехмерной сферы единичного радиуса. Меры областей этой поверхности, соответствующие различным классам точек, определяют их распространенность в системах общего вида.

Точки типа центр являются исключительными (при малом изменении параметров общего вида системы превращаются в точки других классов) и имеют меру ноль. Фокусам соответствует область, заданная условием

$$(a - d)^2 + 4bc < 0. \quad (16)$$

Седлам соответствует область, заданная условием

$$(a - d)^2 + 4bc > 0, \quad ad - bc < 0. \quad (17)$$

Остальная часть поверхности гиперсферы соответствует узлам.

Вычисление объемов областей (16) и (17) на поверхности гиперсферы (15) можно провести численно. Найденные значения вероятностей фокусов (P_F), седел (P_S) и узлов (P_N) таковы:

$$P_F = 0.29, \quad P_S = 0.50, \quad P_N = 0.21. \quad (18)$$

Таким образом, для систем общего вида наиболее вероятным типом неподвижной точки является седло, менее вероятен фокус, а узел является самым редким типом. Частоты устойчивых и неустойчивых точек среди фокусов и узлов равны по очевидной симметрии.

§ 03 Бифуркации на фазовой плоскости

- ◆ Изменения в числе и типе неподвижных точек для двумерных автономных динамических систем могут быть разбиты на два класса.

К первому классу отнесем **числа** неподвижных точек, которые есть и у одномерных динамических систем (V03) - тангенциальную бифуркацию, бифуркацию удвоения и бифуркацию смены устойчивости. Для всех этих случаев в точке бифуркации динамическая система имеет **кратную** неподвижную точку.

Во второй класс отнесем все те изменения, которые связаны с изменением **типа** изолированных неподвижных точек. Такие изменения специфичны для систем с размерностью фазового пространства $K \geq 2$.

На рисунке V04.1 на плоскости параметров $\{S, D\}$ показаны области, соответствующие неподвижным точкам разных типов. В первом квадранте расположены неустойчивые фокусы и узлы, в четвертом - устойчивые; в нижней полуплоскости расположены седла. Рисунок позволяет перечислить типичные бифуркации изолированных неподвижных точек:

1) изменение типа устойчивости фокуса (при котором в точке бифуркации неподвижная точка становится центром)

2) превращение фокуса в узел (или обратно) с сохранением типа устойчивости;

3) превращение узла в седло.

Превращение неустойчивого узла в устойчивый и превращение седла в фокус возможны только тогда, когда траектория эволюции системы на плоскости управляемых параметров проходит через начало координат. Такие переходы, при которых в точке бифуркации **оба** характеристических показателя обращаются в ноль, имеют меру ноль.

❖ **Пример 1.** Рассмотрим свойства неподвижных точек в автономной двумерной системе с уравнениями движения

$$\dot{x} = x - x^2 y, \dot{y} = -y + \lambda x - x^2, \quad (19)$$

где λ - управляемый параметр. Положение неподвижных точек определяется точками пересечений кривых

$$y = \frac{1}{x}, y = \lambda x - x^2 \quad (20)$$

гиперболе и параболе).

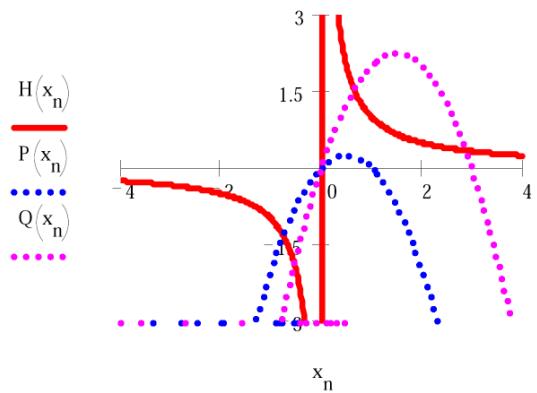


Рис. 04.2
Кривые (20) на фазовой плоскости. Парабола нарисована при значениях параметра $\lambda = 1$ и $\lambda = 3$.

Из рисунка видно, что всегда есть одна неподвижная точка в третьем квадранте ($x < 0, y < 0$), а в первом квадранте ($x > 0, y > 0$) пара неподвижных точек появляется в результате тангенциальной бифуркации при некотором пороговом значении управляемого параметра $1 < \lambda < 3$. Найдем значение λ . Исключая y из уравнений (20), получаем

$$x^3 - \lambda x^2 + 1 = 0. \quad (21)$$

На пороге бифуркации это уравнение имеет двукратный корень $x_2 = x_3 = X$:

$$x^3 - \lambda x^2 + 1 = (x - x_1)(x - X)^2. \quad (22)$$

Приравнивая в этом уравнении члены в при одинаковых степенях x , получаем

$$X = 2^{1/3} \approx 1.26, \lambda = 3 * 2^{-2/3} \approx 1.89. \quad (23)$$

Таким образом, при $0 < \lambda < \Lambda$ у системы одна, а при $\lambda > \Lambda$ - три неподвижные точки $x_1 < x_2 < x_3$. С ростом $\lambda > \Lambda$ точка x_2 сдвигается влево (при очень больших λ $x_{1,2} \approx \pm \sqrt{\lambda}$), а точка x_3 сдвигается вправо (при очень больших λ $x_3 \approx \lambda$).

❖ **Задача 04.1** Кроме неподвижных точек $x_{1,2,3} \neq 0$, система

$$\dot{x} = x - x^2 y, \dot{y} = -y + \lambda x - x^2$$

обладает тривиальной неподвижной точкой, совпадающей с началом координат. Исследовать ее свойства (тип и устойчивость).

Обратимся теперь к исследованию типов неподвижных точек. Матрица системы (19) имеет вид

$$M = \begin{vmatrix} 1-2xy & -x^2 \\ \lambda-2x & -1 \end{vmatrix}. \quad (24)$$

Ее след S и детерминант D равны

$$S = -2xy; D = -1 + 2xy + \lambda x^2 - 2x^3. \quad (25)$$

Учитывая первое из условий (20), в неподвижных точках $S = -2 < 0$. Поэтому возможны бифуркации смены типа седло \leftrightarrow узел на линии $D = 0$ и узел \leftrightarrow фокус на линии $D = S^2/4 = 1$.

Рассмотрим первое условие. Детерминант D в неподвижных точках обратится в нуль, если абсцисса неподвижной точки будет удовлетворять уравнению

$$2x^3 - \lambda x^2 - 1 = 0. \quad (26)$$

Одновременно для абсциссы неподвижной точки должно выполняться условие (21). Вычитая из одного уравнения другого, находим значение абсциссы неподвижной точки, при котором $D = 0$: $x_i = 2^{1/3} = X$. Таким образом, в нашей модели на пороге тангенциальной бифуркации определитель матрицы устойчивости обращается в нуль.

❖ **Задача 04.2** Доказать, что для **любой** двумерной автономной системы на пороге тангенциальной бифуркации определитель матрицы устойчивости обращается в нуль.

При $\lambda > \Lambda$ определитель в точке x_3 отрицателен, и эта точка является **седлом**.

Определитель в точке x_2 положителен - и эта точка является устойчивым узлом, если $D < S^2/4 = 1$, и устойчивым фокусом в обратном случае. Из условия (25) с учетом равенства $xy = 1$ получаем уравнение $2x^3 - \lambda x^2 = 0$, откуда $x = \lambda/2$. Подставляя это значение в (21), находим пороговое значение $\Lambda' = 2 > \Lambda$. Таким образом, точка x_2 является **устойчивым узлом** при $1.89 < \lambda < 2$ и **устойчивым фокусом** при $\lambda > 2$.

Наконец, в точке x_1 определитель $D > 1$, поэтому эта точка при любых значениях λ является **устойчивым фокусом**.

Таким образом, при значениях $\lambda > \Lambda$ система обладает двумя аттракторами и является **бистабильной**.

❖ **Задача 04.3** Определить границы бассейнов аттракторов x_1 и x_2 модели (19).

Следующим этапом исследований должно быть построение ветвей сепаратрисы седловой точки. По сказанному выше, их направление вблизи седла совпадает с направлением собственных векторов матрицы устойчивости. При $\lambda = 3$ эти направления даются формулами для отклонений $\eta = -0.285\xi$ для неустойчивой и $\eta = 0.577\xi$ для устойчивой ветвей (см. рисунок).

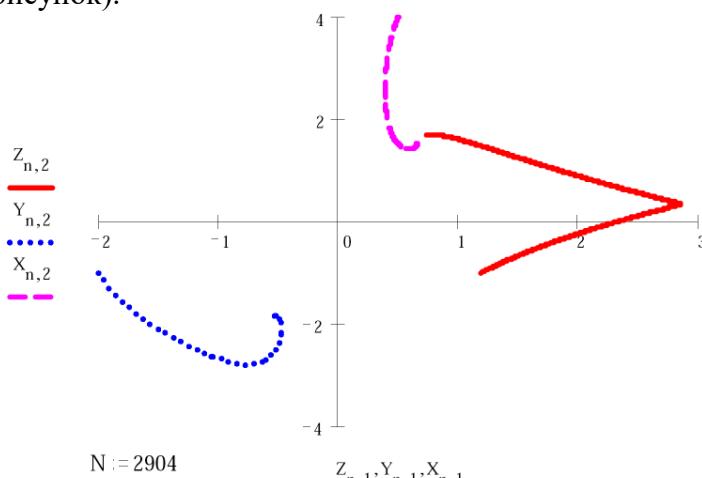


Рис. 04.3

К построению фазового портрета системы (19). Показаны три фазовые траектории для значения $\lambda = 3$: притягивающаяся к точке x_1 (пунктирная линия), притягивающаяся к точке x_2 (штриховая линия) и траектория, проходящая вблизи двух ветвей сепаратрисы седла x_3 (сплошная линия).

◆◆ Для двумерной автономной системы определение положений неподвижных точек, установление их типов (центр, устойчивый/неустойчивый фокус, устойчивый/неустойчивый узел или седло) и определение положений ветвей сепаратрис в большинстве случаев достаточно для построения глобального фазового портрета системы.

