V03 ОДНОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрение динамических систем мы начнем с одномерных автономных моделей. Хотя закон движения таких систем не относятся к колебательным, есть ряд причин, по которым именно с них надо начинать.

Во-первых, именно эти модели являются простейшими. Во-вторых, обычная для таких моделей монотонная релаксация к положению равновесия является весьма распространенным типом движения в окрестности неподвижных точек более сложных систем. В-третьих, в некоторых случаях модели с несколькими динамическими переменными могут быть редуцированы к одномерным. Примерами могут служить уравнения, возникающие в теории двумерных интегрируемых систем, совершающих релаксационные автоколебания, и при использовании метода медленно меняющихся амплитуд.

В конце этого раздела рассматриваются две неавтономные одномерные системы.

§ 01 Уравнение движения и неподвижные точки

◆ Простейшей моделью динамической системы является автономная модель с одной динамической переменной x. Уравнение движения такой модели имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = F(x). \qquad (1)$$

Фазовое пространство такой системы одномерно. Неподвижные точки x_i определяются уравнением

$$F(x_i) = 0. \qquad (2)$$

Пусть $F(x_1) = 0$. Рассмотрим движение системы вблизи неподвижной точки o_1. Положим $x = x_1 + \xi$, подставим это выражение в уравнение движения (1), разложим $F(x)$ в ряд Тейлора по ξ и пренебрежем всеми членами, кроме линейных по ξ. Такая процедура называется *линеаризацией*, а величина ξ называется *отклонением*. Уравнение движения для отклонения имеет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \kappa\xi \qquad (3)$$

где

$$\kappa = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_1} \qquad (4)$$

Если значение κ конечно, то решение уравнения (3) имеет вид

$$\xi(t) = \xi_0 e^{\kappa t}. \qquad (5)$$

Если $\kappa > 0$, то отклонение со временем растет по абсолютной величине - неподвижная точка неустойчива, а если $\kappa < 0$, то отклонение со временем убывает по абсолютной величине - неподвижная точка устойчива.

✧ Величина κ может быть введена в любой - а не только в неподвижной - точке фазового пространства и называется локальным характеристическим показателем. ✧ Случай $\kappa = \pm\infty$ встречается в теории колебаний гамильтоновых систем с одной степенью свободы; при этом точка x_1 называется точкой поворота.

◆ Если функция $F(x)$ гладкая, то в общем случае параметры $\kappa(x_i)$ в неподвижных точках не равны нулю. Устойчивые неподвижные точки являются аттракторами движения, любой интервал, содержащий только одну устойчивую неподвижную точку, является ловушкой, а наибольший из таких интервалов является бассейном аттрактора. Финитное движение системы (1) всегда заканчивается в устойчивой неподвижной точке.

Уравнение движения (1) часто может быть решено в явном виде.

✧ **Пример 1.** Простейшая модель химической кинетики (2.22) при $\mu \to 0$ превращается в систему уравнений

$$\dot{x} = -2x,\ \dot{y} = x \tag{6}$$

Первое уравнение одномерно, а второе может быть проинтегрировано после подстановки явного вида функции $x(t)$: в итоге $x(t) = x_0 e^{-2t}$, $y(t) = y_0 + \frac{x_0}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)$.

✧ **Пример 2.** В экологическом моделировании численность $N(t)$ особей определенного вида в данной популяции обычно описывается моделью типа (1)

$$\dot{N} = F(N). \tag{7}$$

Простейшая, линейная зависимость $F(N) = aN$ имеет одну неустойчивую неподвижную точку $N_1 = 0$ и соответствует введенной Мальтусом (R.T. Malthus, 1798) модели неограниченного экспоненциального роста численности популяции. Более реалистичная модель, учитывающая ограниченность ресурсов, была введена Ферхюльстом (P.F. Verhulst, 1845)

$$\dot{N} = aN - bN^2 \tag{8}$$

При $a > 0,\ b > 0$ эта модель имеет две неподвижные точки - неустойчивую $N_1 = 0$ и устойчивую $N_2 = a/b$. Уравнение (8) элементарно интегрируется:

$$N(t) = \frac{aN_0 e^{at}}{bN_0\left(e^{at} - 1\right) + a} \tag{9}$$

Если $N_0 << N_2$, то начальная стадия роста является экспоненциальной, $N(t) \approx N_0 e^{at}$. При больших t функция $N(t)$ стремится к предельному значению N_2 по экспоненциальному закону:

$$N(t) \approx N_2 - \left(\frac{N_2}{N_0} - 1\right) e^{-at} \tag{10}$$

Уравнение Ферхюльста (8) часто называют ***логистическим уравнением***, а закон движения (9) при $a > 0,\ b > 0, N_0 << a/b$ называют ***логистическим законом***.

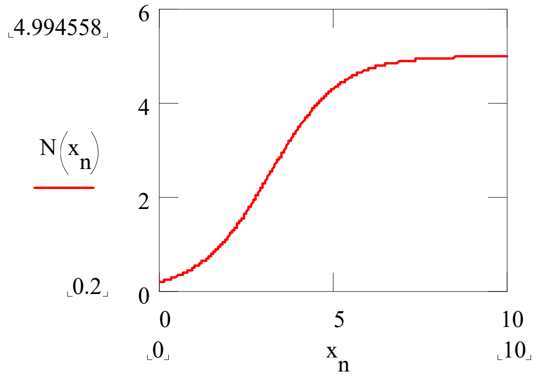

Рис. V03.1
Логистический закон движения (9) при $a = 1$, $b = 0.2$, $N_0 = 0.2$.

✧ **Пример 3.** Рассмотрим модель с уравнением движения

$$\dot{A} = \alpha A\left(1 - \frac{3}{4}A^2\right). \tag{11}$$

Такое уравнение описывает медленные (при $\alpha \ll 1$) изменения амплитуды A гармонических колебаний в осцилляторе Рэлея. Домножая уравнение (11) на A и вводя переменную $x = A^2$, вновь приходим к логистическому (ср. (8)) уравнению

$$\dot{x} = 2\alpha x - \frac{3}{2}\alpha x^2. \tag{12}$$

Таким образом закон изменения **квадрата** амплитуды гармонических колебаний в осцилляторе Рэлея при $\alpha \ll 1$ является логистическим.

◆ Уравнение движения (1) в любом случае может быть сведено к однократной квадратуре

$$dt = \int \frac{dx}{F(x)}, \tag{13}$$

определяющей функцию $t(x)$ и, тем самым, обратную ей функцию $x(t)$. Такую форму представления результата в теоретической физике принято считать точным решением задачи и тогда, когда интеграл в (13) не может быть выражен через известные функции.

§ 02 Бифуркации

◆ Единственными особыми решениями для одномерных систем являются неподвижные точки. Поэтому бифуркации в таких системах связаны с появлением, исчезновением и изменением характера устойчивости неподвижных точек (2). Без ограничения общности функцию $F(x)$ можно считать полиномом (некоторой степени N). По основной теореме алгебры такой полином имеет N корней, причем комплексные корни образуют пары комплексно сопряженных чисел. Таким образом, в точке бифуркации число действительных корней уравнения $F(x) = 0$ может измениться на четное число – неподвижные точки появляются и исчезают **парами**.

Для рассмотрения закономерностей бифуркации достаточно аппроксимировать функцию $F(x)$ **локально** в окрестности точки рождения корней. Эту аппроксимацию можно осуществеить полиномами невысоких степеней. Рассмотрим эволюцию неподвижных точек динамической системы (1) с зависящей от параметра с правой частью $F(x,\lambda)$ при изменении параметра λ.

◆ Рассмотрим модель

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda + x^2 \tag{14}$$

При $\lambda < 0$ уравнение (2) не имеет вещественных корней, а при $\lambda > 0$ имеет два вещественных корня

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}, \tag{15}$$

соответствующие двум неподвижным точкам. Непосредственной проверкой легко убедиться, что одна из этих неподвижных точек устойчива, а другая неустойчива.

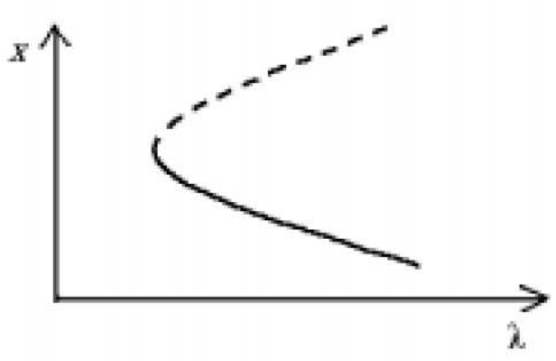

Рис. V03.2
Эволюция неподвижных точек при изменении управляющего параметра на плоскости "переменная - параметр" при **тангенциальной бифуркации**. Сплошная линия изображает траекторию устойчивой точки, а штриховая - неустойчивой.

Появление при данном значении управляющего параметра пары неподвижных точек (разной устойчивости) называется ***тангенциальной бифуркацией*** (**saddle-node bifurcation**).

✧ Исчезновение пары неподвижных точек часто называют ***обратной*** тангенциальной бифуркацией.

◆ Тангенциальная бифуркация соответствует случаю, когда на пороге бифуркации уравнение $F(x)=0$ имеет двукратный корень. Достаточно часто встречается ситуация, когда это уравнение на пороге бифуркации имеет трехкратный корень. Такая бифуркация может быть описана моделью

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x-x^3. \qquad (16)$$

При любых λ у системы (16) есть неподвижная точка $x_1=0$: $F'(0)=\lambda$, поэтому x_1 устойчива при $\lambda<0$ и неустойчива при $\lambda>0$. Кроме того, при $\lambda>0$ у системы появляются еще две неподвижные точки

$$x_{2,3}=\pm\sqrt{\lambda}. \qquad (17)$$

$F'(x_{2,3})=-2\lambda$, поэтому обе они устойчивы.

Таким образом, в точке бифуркации происходит рождение пары точек одинаковой устойчивости, совпадающих в момент рождения с третьей неподвижной точкой, меняющей при бифуркации свою устойчивость. Такая бифуркация называется ***бифуркацией удвоения*** (**pitchfork bifurcation**).

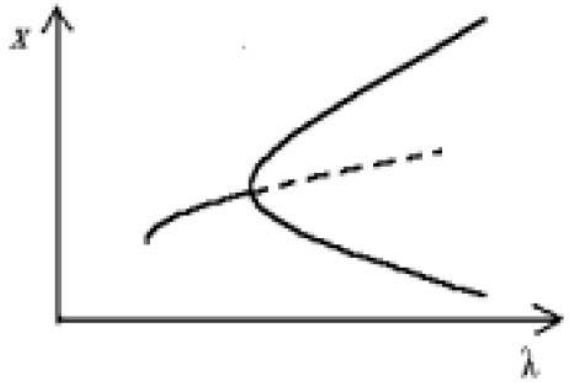

Рис. V03.3
Эволюция неподвижных точек при изменении управляющего параметра на плоскости "переменная - параметр" при **бифуркации удвоения**. Сплошная линия изображает траекторию устойчивой точки, а штриховая - неустойчивой.

◆ Динамическая модель, имеющая более одной устойчивой неподвижной точки, называется *мультистабильной*. Для часто встречающегося случая, когда таких точек две, используется термин *бистабильность*. Легко видеть, что бифуркация удвоения всегда приводит к бистабильности.

✧ Бесконечно удаленная точка, даже устойчивая, при таком подсчете не учитывается.

◆ Рассмотрим эволюцию неподвижных точек модели с уравнением движения

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - x^2 \qquad (18)$$

У этой системы при любых значениях λ есть две неподвижные точки, $x_1 = 0$ и $x_2 = \lambda$. Значения производной правой части уравнения движения (18) в этих точках равны

$$F'(x_1) = \lambda,\ F'(x_2) = -\lambda\,. \qquad (19)$$

При изменении параметра λ число неподвижных точек остается неизменным, однако при переходе через точку бифуркации $\lambda = 0$ меняется тип устойчивости точек. Такое поведение называется ***бифуркацией смены устойчивости***.

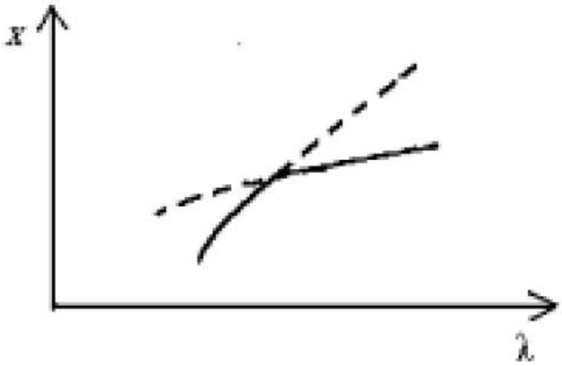

Рис. V03.4
Эволюция неподвижных точек при изменении управляющего параметра на плоскости "переменная - параметр" при бифуркации смены устойчивости. Сплошная линия изображает траекторию устойчивой точки, а штриховая - неустойчивой.

Практически все встречающиеся бифуркации в одномерных системах принадлежат к одному из трех указанных типов.

◆◆ *Перечисленные выше типы бифуркаций – тангенциальная, удвоения и смены устойчивости – применимы к описанию рождения и исчезновения неподвижных точек не только в одномерных системах – но и в системах с* ***любой*** *размерностью фазового пространства.*

§ 03 Гистерезис в бистабильных системах. Запаздывание

◆ Рассмотрим модель с уравнением движения

$$\dot{x} = \mu + x - x^3, \qquad (20)$$

где μ - управляющий параметр. Эта модель имеет два бифуркационных значения параметра μ,

$$\mu_{\pm} = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}} \qquad (21)$$

При $\mu < \mu_-$ и $\mu > \mu_+$ система (20) имеет единственную устойчивую неподвижную точку. При значениях $\mu = \mu_\pm$ происходят тангенциальные бифуркации, и в области $\mu_- < \mu < \mu_+$ система бистабильна - имеет две неустойчивых и одну устойчивую неподвижные точки. На плоскости "переменная - параметр" устойчивые неподвижные точки образуют две ветви, $x_-(\mu)$ и $x_+(\mu)$, области определения которых перекрываются в области бистабильности системы.

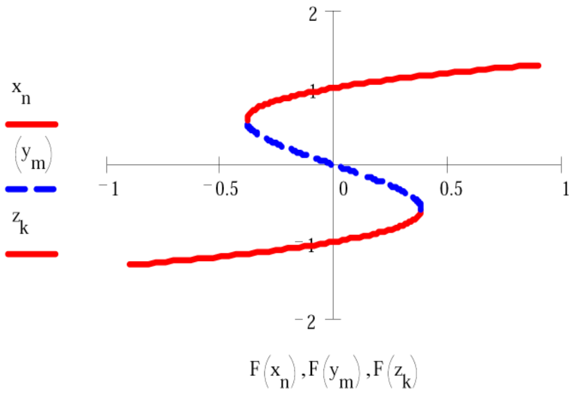

Рис. V03.5
Положение неподвижных точек системы (20) на плоскости "параметр μ - переменная x". Сплошные линии соответствуют устойчивым точкам, штриховая - неустойчивой точке.

◆ Рассмотрим теперь неавтономное обобщение модели (20) с уравнением движения

$$\dot{x} = \mu(t) + x - x^3, \qquad (22)$$

Пусть параметр $\mu(t)$ медленно изменяется ($|\dot{\mu}| << 1$), проходя через область бистабильности. Для определенности примем, что $\mu(0) < \mu_-$, $\dot{\mu} > 0$, а начальное условие $x(0)$ совпадает с неподвижной точкой системы (20) при значении $\mu(0)$.

При медленном изменении параметра $\mu(t)$ точка $x(t)$ будет адиабатически следовать за положением неподвижной точки системы (20) при соответствующем значении μ, $x(t) = x_-[\mu(t)]$, до тех пор, пока значение μ не достигнет бифуркационного значения μ_+. При $\mu(t) > \mu_+$ фазовая точка быстро перейдет в окрестность единственной существующей в этой области ветви $x_+(\mu)$ и в дальнейшем будет двигаться по ней: $x(t) = x_+[\mu(t)]$.

Если обратить направление изменения времени, то точка $x(t)$ будет адиабатически следовать за положением неподвижной точки системы (20) при соответствующем значении μ, $x(t) = x_+[\mu(t)]$, до тех пор, пока значение μ не достигнет бифуркационного значения μ_-. При $\mu(t) < \mu_-$ фазовая точка быстро перейдет в окрестность единственной существующей в этой области ветви $x_-(\mu)$ и в дальнейшем будет двигаться по ней: $x(t) = x_-[\mu(t)]$.

Таким образом, при медленном переходе управляющего параметра через область бистабильности в противоположных направлениях законы движения $x(t)$ в области бистабильности могут существенно различаться. Это явление, типичное для мультистабильных систем, в теории колебаний называется ***гистерезисом***.

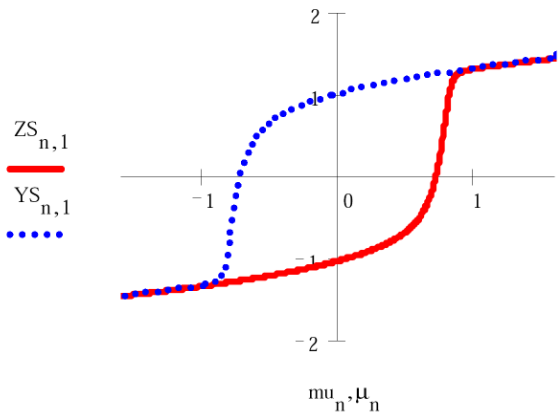

Рис. V03.6
Положение фазовой точки системы (22) на плоскости на плоскости "параметр $\mu(t)$ - переменная $x(t)$" для законов изменения параметра $\mu(t) = -1 + 0.1t$ (сплошная ветвь) и $\mu(t) = 1 - 0.1t$ (пунктирная ветвь).

✧ Термин "гистерезис" (от греческого ηιστερεσιζ - запаздывание) введен Дж.А. Эвингом (J.A. Ewing, 1890) для обозначения открытого им явления запаздывания изменений намагниченности вещества по отношению к изменениям напряженности внешнего магнитного поля. В нашем примере можно считать, что переход на новую ветвь устойчивых неподвижных точек запаздывает по отношению к прохождению управляющим параметром бифуркационного значения. В теорию колебаний термин "гистерезис" в использованном нами смысле был введен Ван дер Полем в 1922 г.
[VdP22] Van der Pol B. On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom. Phil. Mag. Ser. 6, 1922, v.43, no.256 [REF: Landa80]

◆ Рассмотрим простейшую модель с одной степенью свободы - линейную модель с одной степенью свободы, которую мы будем называть ***релаксатором*** - под действием гармонически зависящего от времени возмущения. Эта модель описывается уравнениями движения

$$\dot{x} + \gamma x = F\cos\omega t \tag{23}$$

Представим решение в виде гармонического колебания

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{24}$$

где амплитуда A и фазовый сдвиг φ суть величины, подлежащие определению. Подстановка этого решения в уравнение (23) приводит к ответу

$$A = \frac{F}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}, \qquad \varphi = -\mathrm{arctg}\frac{\omega}{\gamma} \tag{25}$$

Таким образом, под действием гармонической силы колебания релаксатора оказываются гармоническими, отстающими по фазе от силы. Фазовый сдвиг φ уменьшается с ростом константы затухания. Решение (24) можно также переписать в виде

$$x(t) = \frac{F}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}\cos[\omega(t - \tau)] \tag{26}$$

где $\tau = \varphi/\omega$, и интерпретировать так: координата релаксатора пропорциональна значению (гармонической) силы, взятому в предшествующий момент времени.

☯