V02 ДИНАМИКА КОЛЕБАНИЙ: МОДЕЛИ СИСТЕМ

§ 01 Динамические системы

◆ ***Динамическая система*** (ДС) - модель, которая описывается независимой переменной - ***временем*** t - и набором K величин - ***динамических переменных***, ($1 \le i \le K$), считающихся функциями времени: $x_i = x_i(t)$. Совокупность значений всех динамических переменных $\{x_i(t_0)\}$ в данный момент времени t_0 определяет ***состояние*** *динамической системы*. Совокупность $\{x_i(t_0)\}$ считается координатами точки в K-мерном пространстве состояний системы, которое называется ***фазовым пространством***. Точка этого пространства, соответствующая состоянию системы, называется *фазовой точкой*.

✧ Для упрощения записи формул координаты фазовой точки можно считать компонентами вектора $\vec{x}(t)$. В использовании векторных обозначений нужна осторожность: x_i могут иметь разные размерности.

✧ Величины $\{x_i\}$ считаются действительными. Для описания некоторых динамических систем (например, возникающих в теории электромагнитных волн или в квантовой механике) вводятся комплексные динамические переменные. В этом случае при подсчете размерности фазового пространства K действительные и мнимые части переменных должны учитываться по отдельности.

◆ Описание динамической системы может потребовать указания значений ряда *параметров* динамической системы - физических величин $\{a_j\}$ ($1 \le j \le L$), отличных от динамических переменных.

✧ Совокупность параметров $\{a_j\}$ можно обозначать как вектор $\vec{a}$ в L-мерном *пространстве параметров*.

◆ Динамическая система определена, если задан ***оператор эволюции*** $\hat{S}(t,t_0)$, который известному состоянию системы в момент t_0 сопоставляет единственное состояние системы в любой допустимый последующий момент времени $t > t_0$: $\vec{x}(t) = \hat{S}(t,t_0)\vec{x}(t_0)$. Зависимость $\vec{x}(t)$ называется ***законом движения*** системы, или просто ***движением***. Совокупность точек $\{\vec{x}(t) | \forall t (> t_0)\}$ образует ***фазовую траекторию*** движения. Обычно оператор $\hat{S}(t,t_0)$ не дан непосредственно, а определяется ***уравнениями движения***.

§ 02 Уравнения движения

◆ Для теории колебаний наиболее важен класс моделей, в которых время t изменяется непрерывно, а уравнения движения образуют систему K обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i\left(\{x_i\},\{a_j\}\right), \quad (1 \le i \le K). \qquad (1)$$

где $\{a_j\}$, ($1 \le j \le L$) - параметры. В векторных обозначениях: $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x},\vec{a})$.

✧ **Пример 1.** Система уравнений, определяющих движение материальной точки массы m под действием силы $\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}})$, зависящей от ее координат $\vec{r}$ и скорости $\dot{\vec{r}}$ в данной инерциальной системе отсчета, включает определение импульса частицы,

$$m\dot{\vec{r}} = \vec{p}, \tag{2}$$

и второй закон Ньютона,

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}}). \tag{3}$$

В совокупности они образуют систему шести уравнений вида (1). Решение такой системы возможно только при специальном выборе функций $\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}})$.

✧ **Пример 2.** Канонические уравнения механики гамильтоновых систем,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{4}$$

где $H(\vec{p},\vec{q},t)$ - функция Гамильтона [ЛЛI, §40] образуют систему вида (1).

✧ **Пример 3.** Колебательный контур - модель, описывающая электрическую цепь, состоящую из конденсатора емкостью C, пластины которого соединены линейным проводником с сопротивлением R и индуктивностью L. Состояние системы задается величиной заряда конденсатора q и величиной тока I в проводнике. Эти величины связаны локальным законом сохранения заряда,

$$\dot{q} = I, \tag{5}$$

и уравнением для скорости изменения тока, вытекающим из закона электромагнитной индукции и закона Ома для участка цепи, содержащего ЭДС,

$$\dot{I} = -\frac{1}{LC}q - \frac{R}{L}I. \tag{6}$$

В совокупности они образуют систему двух уравнений вида (1).

✧ **Пример 4.** Следующий пример заимствуем из физической кинетики. Основным уравнением химической кинетики является ***закон действующих масс*** (mass action law): скорость химической реакции, в ходе которой из k молекул вещества x, l молекул вещества y и т.д. образуется одна молекула вещества z при постоянных прочих условиях пропорциональна произведению концентраций $(X,Y...)$ исходных молекул, взятых в степенях, равных числу молекул данного сорта, участвующих в реакции:

$$\dot{Z} \sim X^k Y^l ... \tag{7}$$

✧ Закон действующих масс (ЗДМ) был установлен норвежскими химиками К.М. Гульдбергом и П. Вааге (C.M. Guldberg, P. Waage) в 1864 - 1879 гг. ЗДМ применим, как правило, для описания **элементарных стадий** химических реакций. Выявление таких стадий составляет одну из важнейших задач химической кинетики, часто далеко не простую. Так, по современным представлениям механизм реакции окисления водорода, описываемой химическим уравнением $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$, насчитывает 30 (тридцать) стадий [ХБК83, с.7], а одностадийные реакции представляют собой редкие исключения [ХБК83, с.11]. Далее, ЗДМ применим к реакциям, идущим в объеме разбавленных растворов или газовых смесей невысокой плотности.

[ХБК83] Химическая и биологическая кинетика. Под ред. Н.М. Эмануеля, И.В. Березина, С.Д. Варфоломеева. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983 г, - 296 с.

Простейшей является протекающая при постоянном объеме системы веществ мономолекулярная химическая реакция $x \to y + z$, в ходе которой молекула вещества x распадается на молекулы веществ y и z. На основании закона действующих масс она может быть описана уравнением

$$\frac{dX}{dt} = -aX \tag{8}$$

где X - число молекул вещества x (при постоянном объеме пропорциональное концентрации), а a - параметр. Одновременно с ней может протекать и обратная бимолекулярная реакция $y + z \to x$, в ходе которой из молекул веществ y и z образуется молекула вещества x. С учетом обратной реакции уравнение для X принимает вид

$$\frac{dX}{dt} = -aX + bYZ\,. \tag{9}$$

где Y и Z - числа молекул веществ y и z, а b - параметр, характеризующий скорость обратной реакции. Аналогично для скорости изменения числа молекул Y получаем уравнение

$$\frac{dY}{dt} = aX - bYZ\,. \tag{10}$$

Так как, очевидно, для числа молекул веществ должно выполняться условие

$$2X + Y + Z = S = \mathrm{const}\,, \tag{11}$$

исключая переменную Z с помощью уравнения (11), получаем простейшую модель химической кинетики, заданную двумя уравнениями первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -aX + bY\left(S - 2X - Y\right), \\ \dot{Y} &= aX - bY\left(S - 2X - Y\right), \end{aligned} \tag{12}$$

и зависящую от параметров a, b и S.

Если исходные уравнения движения системы представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения порядка выше первого, то, приняв производные динамических переменных за новые динамические переменные, всегда можно свести систему к виду (1). В дальнейшем в необходимых случаях мы будем подразумевать использование этой процедуры.

✧ **Пример 5.** Система уравнений

$$\ddot{x} + xy = 0, \qquad \ddot{y} + \dot{x}y = 0 \tag{13}$$

эквивалентна системе

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -xy, \quad \dot{y} = q, \quad \dot{q} = -py\,, \tag{14}$$

которая имеет вид (1) и описывает динамическую систему с $K = 4$ (см. также примеры 1 и 2 в следующем параграфе).

Если K - размерность фазового пространства, то число $N = K/2$ в теории колебаний называется *числом степеней свободы*.

✧ Полуцелые значения N неуклюжи; к тому же они употребляются только в отечественной литературе. Мы будем предпочитать термин «K-мерные динамические системы», а число степеней свободы N будем привлекать, только когда оно целое.

◆ В теории колебаний, как и вообще в теоретической физике, исследование уравнений движения удобно проводить, ориентируясь на собственные масштабы системы. Если среди параметров модели имеются три величины с независимыми размерностями, то их удобно принять в качестве единиц измерения. При этом время, динамические переменные и все остальные параметры задачи станут безразмерными величинами.

✧ Следуя традициям теоретической физики, мы всюду подразумеваем использование системы единиц с тремя основными величинами - например, абсолютную гауссову систему СГС. При использовании других систем единиц необходимо ввести соответствующие изменения.

Одной из выгод такого преобразования является возможность введения расстояния R между точками $\vec{x}$ и $\vec{y}$ фазового пространства, которое обычно считается евклидовым,

$$R(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{K}\left(x_i - y_i\right)^2}\,, \qquad (15)$$

и скорости V движения точки в фазовом пространстве,

$$V = \sqrt{\sum_{i=1}^{K}\left(\dot{x}_i\right)^2}\,. \qquad (16)$$

Иллюстрируем переход к безразмерным переменным примерами.

✧ **Пример 6**. В задаче об одномерном движении частицы в поле с потенциалом

$$U(y) = U_0\left[\frac{1}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{y}{a}\right)^4\right] \qquad (17)$$

под действием силы вязкого трения $f(\dot{y}) = -\alpha\dot{y}$ и внешней силы, зависящей от времени τ по гармоническому закону, уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{y} + \alpha\dot{y} + U_0\left[\frac{y}{a^2} + \frac{y^3}{a^4}\right] = \Phi\cos\Omega\tau, \qquad (18)$$

где m - масса частицы, α - постоянная вязкого трения, U_0 и a - характерные величина и длина потенциала, Φ и Ω - амплитуда и частота внешней силы. Выбрав в качестве единиц массы, длины и времени соответственно массу частицы m, характерную длину потенциала a и величину размерности времени

$$\theta = \sqrt{\frac{ma^2}{U_0}} \qquad (19)$$

перепишем уравнение (18) в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + x^3 = F\cos\omega t \qquad (20)$$

Входящие в это уравнение величины

$$x = \frac{y}{a}, \quad t = \frac{\tau}{\theta}, \quad 2\gamma = \alpha\frac{\theta}{m}, \quad F = \Phi\frac{a\theta^2}{m}, \quad \omega = \Omega\theta \qquad (21)$$

безразмерны. Уравнение (20), зависящее от **трех** безразмерных параметров, относится к числу уравнений Дуффинга и будет подробно исследоваться в последующих лекциях.

✧ **Пример 7.** Простейшая модель химической кинетики (12) содержит три параметра - a, b и S, размерности которых зависимы: $[b]=\left[S^{-1}a\right]$. Выбрав в качестве единиц времени и концентрации величины $2/a$ и S соответственно, перепишем систему (12) в виде

$$\dot{x}=-2x+2\mu y(1-x-y),\ \dot{y}=x-\mu y(1-x-y) \qquad (22)$$

Входящие в это уравнение величины

$$x=2\frac{X}{S},\ y=\frac{Y}{S},\ \mu=2\frac{bS}{a} \qquad (23)$$

безразмерны. Таким образом, простейшая модель химической кинетики характеризуется **одним** безразмерным параметром μ.

В дальнейшем мы всегда будем брать уравнения движения динамических систем в безразмерной форме. Ее использование сокращает число параметров системы в общем случае на три. Ниже, говоря о числе параметров модели, мы всегда будем иметь в виду число параметров для безразмерной формы модели.

§ 03 Классификация динамических систем

◆ Если все параметры a_j не зависят от t, то ДС называется ***автономной***. Если параметры a_j зависят от t заданным образом, $a_j\equiv a_j(t)$, то ДС называется ***неавтономной***.

Каждой неавтономной ДС с K-мерным фазовым пространством может быть сопоставлена эквивалентная автономная ДС с $(K+1)$-мерным фазовым пространством путем следующей процедуры, называемой ***автономизацией***. К системе уравнений движения (1) добавляется уравнение

$$\frac{dx_{K+1}}{dt}=1; \qquad (24)$$

а время t в аргументах $a_j(t)$ заменяется на динамическую переменную x_{K+1}, численно равную времени.

Фазовое пространство системы, получившейся в результате автономизации, называется ***расширенным*** *фазовым пространством*. Таким образом, замена постоянных параметров системы на параметры, зависящие от времени, эффективно увеличивает число степеней свободы системы на $1/2$.

◆ Для динамической системы вида (1) ***локальной диссипацией*** $\Lambda(\vec{x})$ в данной точке $\vec{x}$ фазового пространства называется дивергенция поля фазовых скоростей в этой точке, взятая с обратным знаком:

$$\Lambda(\vec{x})=-\operatorname{div}\dot{\vec{x}}=-\sum_{i=1}^{K}\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial x_i}=-\sum_{i=1}^{K}\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \qquad (25)$$

✧ **Пример 1.** Линейный осциллятор с вязким трением есть система с уравнением движения

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (26)$$

Эта модель может быть описана двумя уравнениями первого порядка (см §02)

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\alpha v - \omega_0^2 x. \qquad (27)$$

Отсюда $\Lambda(\vec{x}) = \alpha$: диссипация линейного осциллятора с вязким трением положительна, постоянна и равна коэффициенту трения. ✧ Для осциллятора с трением диссипация пропорциональна скорости изменения энергии: см. [ЛЛI, §25]. Для систем общего вида энергия не определена, и такой связи нет.

✧ **Пример 2.** Осциллятор Рэлея (модель, которая будет подробно исследоваться в дальнейшем) есть система с уравнением движения

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x}\left(1 - \dot{x}^2\right) + x = 0. \qquad (28)$$

Эта модель может быть описана двумя уравнениями первого порядка (см. §02)

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = \alpha\left(v - v^3\right) - x. \qquad (29)$$

Диссипация осциллятора Рэлея $\Lambda(\vec{x}) = -\alpha\left(1 - 3v^2\right)$ зависит от величины скорости: она отрицательна при $|v| < 1/3$ и положительна при $|v| > 1/3$.

Если диссипация во всех точках фазового пространства постоянна и положительна,

$$\Lambda(\vec{x}) = \gamma > 0 \qquad (30)$$

то она называется ***затуханием***. В некоторых случаях для упрощения формул удобнее обозначение $\Lambda(\vec{x}) = 2\gamma > 0$; при этом γ тоже называют затуханием.

◆ **Теорема об эволюции фазового объема.** Для динамических систем вида (1) относительная скорость изменения величины элементарного фазового объема равна диссипации с обратным знаком.

Рассмотрим элементарный объем

$$V = \prod_{i=1}^{K} \Delta x_i \qquad (31)$$

вблизи точки $\vec{x}$ фазового пространства.

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\Delta x_i} \frac{d}{dt}(\Delta x_i) = \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = -\Lambda(\vec{x}), \qquad (32)$$

что завершает доказательство.

◆ Системы, для которых диссипация равна нулю во всех точках фазового пространства, $\Lambda(\vec{x}) \equiv 0$, называются ***консервативными***. Системы, для которых $\Lambda(\vec{x}) \neq 0$, называются ***диссипативными***.

✧ Если $\Lambda(\vec{x}) \geq 0$ всюду в фазовом пространстве (см. выше пример 1), то фазовый объем при движении уменьшается.

§ 04 Основные задачи теории динамических систем

1. Задача Коши: по заданному начальному состоянию $\vec{x}(t_0)$ при заданных параметрах $\vec{a}$ найти закон движения $\vec{x}(t)$ для $t > t_0$. Обычно принимают $t_0 = 0$, а начальное состояние $\vec{x}(t_0) = \vec{x}(0)$ называют ***начальными условиями***.

✧ Задача Коши особо важна для систем, в которых произвольное - по усмотрению экспериментатора - задание начальных условий $\vec{x}(0)$ невозможно - например, в небесной механике.

2. Исследование устойчивости. Фундаментальной характеристикой данного движения $\vec{x}(t)$ является его ***устойчивость***, определяющая качественный характер взаимного поведения движений с близкими начальными условиями. В частности, решение задачи Коши для данной динамической системы практически ценно, только если известно, что малые вариации начальных условий мало изменят закон движения или отдельные его характеристики. В теории колебаний основную роль играют следующие два определения устойчивости.

◆ Движение $\vec{x}(t)$ ***устойчиво по Ляпунову***, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta(\varepsilon)$ такое, что из $\left|\vec{x}(0) - \vec{x}'(0)\right| < \delta$ при $\forall t$ следует $\left|\vec{x}(t) - \vec{x}'(t)\right| < \varepsilon$. При устойчивом по Ляпунову движении фазовые точки, близкие в начальный момент времени, останутся близкими во все моменты.

◆ Движение $\vec{x}(t)$ ***орбитально устойчиво***, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta(\varepsilon)$ такое, что из $\left|\vec{x}(0) - \vec{x}'(0)\right| < \delta$ при $\forall t$ для некоторого t' следует $\left|\vec{x}(t) - \vec{x}'(t')\right| < \varepsilon$. При орбитально устойчивом движении фазовые траектории, близкие в одном месте фазового пространства, останутся близкими и во всех других местах.

3. Исследование структуры фазового пространства. Для автономных систем с фиксированными значениями параметров определение структуры фазового пространства сводится, в первую очередь, к выделению особых (исключительных) фазовых траекторий.

◆ **3.1.** Состояние динамической системы в общем случае изменяется со временем. Поэтому исключительными фазовыми траекториями являются ***неподвижные точки*** (**fixed points**), представляющие ***состояния равновесия*** системы. Неподвижные точки $\vec{x}_f$ определяются уравнениями $\vec{F}(\vec{x}_f, \vec{a}) = 0$.

◆ **3.2.** Движение динамической системы в общем случае непериодично. Поэтому исключительными являются фазовые траектории, соответствующие ***периодическому движению***. Для автономных динамических систем такие траектории являются замкнутыми кривыми в фазовом пространстве.

✧ Третьим типом исключительных фазовых траекторий являются **сепаратрисы** седловых точек. Их определение будет дано ниже.

◆ **3.3.** Если при любых начальных условиях $\vec{x}_0$ из некоторой области при достаточно больших временах фазовая точка окажется сколь угодно близко к фазовой траектории A, то такая фазовая траектория называется ***аттрактором*** и является исключительной. Множество Ω всех начальных состояний $\{\vec{x}_0\}$, определяющих фазовые траектории, асимптотически притягивающиеся к данному аттрактору A, называется ***бассейном*** (этого) *аттрактора.*

◆ **3.4.** Если при движении системы значения динамических переменных остаются ограниченными - существуют такие положительные числа X_i, что $|x_i(t)| < X_i$ при всех t - то движение системы называется ***финитным***. Если хотя бы для одной переменной это условие не выполняется, то движение системы называется ***инфинитным***. Выделение границ областей финитного движения входит в задачу исследования структуры фазового пространства.

Для системы с K-мерным фазовым пространством и оператором эволюции $S(t)$ ***ловушкой*** (trap) называется K-мерная область фазового пространства $\boldsymbol{T}$ такая, что если в начальный момент времени состояние системы лежит в $\boldsymbol{T}$, то и во все последующие моменты оно будет лежать в $\boldsymbol{T}$:

$$\vec{x}(0) \in \boldsymbol{T} \Rightarrow S(t)\vec{x}(0) \in \boldsymbol{T} \tag{33}$$

Построение ловушки конечных размеров достаточно для доказательства финитности движения системы.

4. Исследование динамической системы. При изменении параметров $\vec{a}$ динамической системы в общем случае изменяются и свойства ее исключительных решений. Особый интерес представляет определение граничных значений параметров, при переходе через которые меняется **число** и/или **тип** таких решений. Такое изменение называется ***бифуркацией***, а соответствующие значения $\vec{a}_b$ - ***точками бифуркации***.

✧ Исследование свойств динамической системы, обладающей несколькими параметрами, представляет весьма трудоемкую задачу. Обычно при таком исследовании исследуют зависимость только от **одного** ***управляющего параметра*** (control parameter) a_i, придавая остальным компонентам вектора $\{a_j\}$ постоянные значения.

✧ Изображение свойств динамической системы на плоскости **двух** управляющих параметров (a_1, a_2) в настоящее время часто выступает как итог завершенного научного исследования. Цветные карты границ областей с качественно различным поведением являются украшением многих современных научных журналов.

◆◆ *Важность задач различных типов **возрастает** в использованном выше порядке их перечисления:*

– главной является задача исследования динамической системы (4);

– исследование структуры фазового пространства (3) является необходимой предпосылкой решения главной задачи;

– исследование устойчивости (2) является вспомогательной задачей;

– решение задачи Коши (1) почти никогда не рассматривается.

§ 05 Исследовательская программа

◆ В центре исследовательской программы теории колебаний стоит задача изучения устойчивых (по Ляпунову или орбитально) периодических и квазипериодических колебаний - выявление областей их существования в пространстве параметров и определение зависимостей характеристик колебаний (в первую очередь - их частот) от параметров динамической системы.

◆ Для решения этой задачи эффективны методы, основанные на непосредственном **численном** интегрировании уравнений движения (1). Поскольку основной объект внимания - устойчивые движения, требования к точности решения уравнений невысоки. Решение задачи Коши, позволяющее с графической точностью (около 1%) изобразить отрезок фазовой траектории длиной в несколько единиц требует считанных секунд работы современных персональных компьютеров. При интегрировании уравнений с различными начальными условиями устойчивые неподвижные точки и предельные циклы выделяются автоматически. Поэтому исследование структуры фазовой плоскости (фазового пространства автономной динамической системы с $K = 2$) с помощью численного эксперимента - нетрудная работа.

◆ Постановка основной задачи теории колебаний во многом определяет и выбор методов ее **аналитического** решения. Точно решаемые модели представляют собой редкие (хотя и ценные) исключения. Приближенные методы основаны, как правило, на разделении движений по масштабам времени на быстрые (с масштабом τ_1) и медленные (с масштабом τ_2):

$$\tau_1 \ll \tau_2 . \tag{34}$$

Примером методов такого типа является метод медленно меняющихся амплитуд, основанный на представлении движения в форме (1.20). Отметим также два предельных случая этой схемы.

В одном пределе время изменения **медленных** изменений считается **бесконечно большим**. Первым этапом решения является подстановка закона движения заданного вида (периодического, реже квазипериодического) с неопределенными параметрами в уравнения движения, пренебрежение членами, не соответствующими постулированной форме закона движения, и самосогласованное определение параметров решения. Последний этап обычно сводится к исследованию корней системы алгебраических уравнений - задача в общем виде громоздкая, но часто допускающая асимптотическое решение в предельных случаях. На худой конец, для решения алгебраической системы можно использовать численные методы - хотя, заметим, в отличие от численного интегрирования дифференциальных уравнений численное решение систем нелинейных алгебраических уравнений не может считаться рутинной задачей. Найденные аналитически приближенные законы движения могут быть проверены сравнением с результатами прямого численного решения системы уравнений движения. В тех случаях, когда точность найденных аналитических решений недостаточна, для их уточнения могут быть применены методы теории возмущений.

В другом пределе время **быстрых** изменений считается **бесконечно малым**. Если в системе уравнений движения удается выделить уравнение бля быстрого изменения переменных, то в нулевом приближении это уравнение превращается в функциональную связь между переменными, и порядок системы понижается. Такой подход используется для исследования релаксационных колебаний.

◆ В дальнейшем мы будем изучать свойства движений динамических систем, рассматривая их в порядке увеличения числа динамических переменных - размерности фазового пространства K. При этом неавтономные системы будут рассматриваться сразу после соответствующих автономных. Для систем данного класса типы движения будут рассматриваться в порядке возрастания сложности - от гармонического к периодическим, квазипериодическим и к модулированным периодическим колебаниям (см. V01).

Основное внимание будет уделено рассмотрению автономных двумерных систем и их неавтономных обобщений. Свойства таких систем будут изучаться в рамках установленного традицией набора **стандартных моделей**. Почти все стандартные модели теории колебаний - осциллятор Дуффинга, модель Лотки - Вольтерра, осцилляторы Рэлея и Ван дер Поля, брюсселятор - даются системами уравнений, правые части которых представляют собой **полиномы второй или третьей степени** от динамических переменных. Важнейшее исключение составляет модель маятника, уравнение движения которой включает трансцендентную функцию; для ее специального рассмотрения есть достаточные причины, которые будут обсуждены в свое время.

Полиномиальные модели невысоких степеней, с одной стороны, удобны для аналитических расчетов, а с другой - обладают типичными свойствами нелинейных систем общего вида.

◆ Необходимость использования стандартных моделей связана с тем, что возможность исчерпывающего исследования сколько-нибудь обширных классов динамических систем практически отсутствует. Рассмотрим автономную динамическую систему с двумя переменными, для которой правые части уравнений движения даются полиномами второй степени общего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2, \\ \dot{y} &= a_7 + a_8 x + a_9 y + a_{10} x^2 + a_{11} xy + a_{12} y^2. \end{aligned} \qquad (35)$$

Часть параметров a_i может быть приведена к значениям ±1 или 0 различными преобразованиями: сдвигом начала координат (2 параметра), поворотом осей координат (1), выбором масштабов динамических переменных (2) и выбором масштаба времени (1). Оставшаяся приведенная система будет характеризоваться шестью произвольными параметрами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$. Ее полный анализ должен включать рассмотрение очень большого числа характерных случаев (типа $\alpha << \zeta \sim 1 << \delta << \beta \sim \varepsilon << \gamma$). Подчеркнем, что здесь мы не касаемся вопроса о трудности решения задачи, а говорим только об объеме исчерпывающего ответа.

✧ **Задача 03.1.** Найти точное число характерных случаев для системы с шестью безразмерными параметрами. УКАЗАНИЕ. Знак "~" симметричен, знак "$\ll$" - нет.

◆ С увеличением размерности системы сложность исследования системы сильно возрастает. Это вызвано несколькими причинами. Во-первых, чем больше размерность фазового пространства, тем сложнее может быть ее установившееся движение. Например, для гамильтоновых консервативных систем число независимых частот квазипериодического движения может достигать числа степеней свободы $N = K/2$ [А89, §49]. В общем случае частот может быть еще больше: по доказанной Андроновым и Виттом теореме [АВ30; А56, с.47], если все динамические переменные системы (1) совершают квазипериодическое движение, то число его независимых частот может достигать (но не превосходить) $K-1$. Чем больше частот, тем более громоздкой становится самая простая модель движения (как минимум, должна быть определена одна фурье-амплитуда для каждой частоты). Практически в теории колебаний ограничиваются рассмотрением квазипериодических движений не сложнее двухчастотных.

[АВ30] Андронов А.А., Витт А.А. Sur le movements quasi-periodiques. Ж. прикл. физики, 1930, т.6, в.1, с.119.
[А56] Андронов А.А. Собрание трудов. Изд.-во АН СССР, 1956. - 538 с.
[А89] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. 3-е изд. - М.: Наука, 1989. - 472 с.

Во-вторых, движение многомерной системы трудно представить наглядно. Сравнительно легко воспринимаются данные, представленные линией на плоскости или поверхностью в трехмерном пространстве. Изображение линии (фазовой траектории) в трехмерном пространстве уже может вызвать трудности в интерпретации, поэтому стараются и его привести к двумерному случаю (например, с помощью отображения Пуанкаре (**Poincare map**) – дискретной последовательности точек пересечения фазовой траектории с координатной плоскостью $\{x, \dot{x}\}$ через равные промежутки времени).

Наконец и в-третьих, с ростом числа динамических переменных увеличивается, как правило, число параметров модели. В результате полное исследование динамической системы становится весьма трудоемким.

◆ Среди многомерных динамических систем в теории колебаний в первую очередь изучаются четырехмерные автономные модели, описывающие системы, составленные из двух слабо взаимодействующих (слабо связанных) двумерных систем.

◆ В завершающем разделе будут рассмотрены модели, которые описываются дифференциально-разностными уравнениями. Хотя с формальной точки зрения эти модели не относятся к конечномерным динамическим системам (состояние системы не задается конечным набором чисел), их свойства во многих практически интересных случаях могут быть изучены методами теории колебаний.

☯