V01A РЕЗОНАНС

One word is too often profaned
For me to profane it.
Percy Bysshe Shelley

◆ Слово "резонанс" является одним из ключевых в теории колебаний. Оно используется для обозначения разных понятий, которые полезно систематизировать.

Термин "резонанс" (от латинского resonare - "вновь звучать") был введен в конце XV века для обозначения наблюдавшегося возбуждения колебаний струны звуком другой струны того же тона. С моделями этого явления связано первое определение резонанса - например, такое:

"Пусть теперь на линейный осциллятор действует периодическая внешняя сила. Исходным для анализа будет уравнение

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos\omega t \qquad (1)$$

где F_0 - постоянная амплитуда внешней силы, ω - ее частота.

Явление резонанса состоит в резком возрастании амплитуды установившихся колебаний, которое наступает при приближении частоты ω гармонического внешнего воздействия к собственной частоте ω_0 осциллятора (в более общем случае - к частоте ω_i одного из собственных колебаний анализируемой системы)." [РТ84, с.24-25]

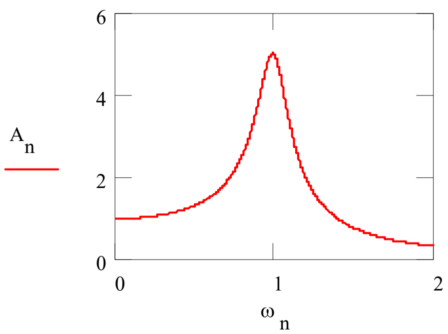

Рис. V01A.1 Линейный резонанс
Зависимость амплитуды A периодических колебаний линейного осциллятора (1) от частоты ω при значениях параметров $\gamma = 0.1\omega_0$ и $F = 1.0$.

Это и подобные определения наиболее распространены в литературе и часто сопровождаются примерами физических задач, в которых проявляется резонанс описанного типа [ФЛС65, гл. 23; РТ84, с. 27-30]. Мы будем называть его ***линейным резонансом***.

◆ Второе значение термина "резонанс" - чисто кинематическое. В небесной механике и астрономии говорят о резонансе периодических движений, если частоты этих движений с высокой точностью связаны между собой резонансными соотношениями. Частоты Ω_i $(1 \le i \le N)$ удовлетворяют *резонансному соотношению* порядка K [А89, с.353], если существуют целые не все равные нулю числа k_i, для которых

$$\sum_{i=1}^{N} k_i \Omega_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} |k_i| = K \qquad (2)$$

Резонансные соотношения с большей или меньшей точностью выполняются для многих наблюдаемых движений небесных тел (см. V01.2). Общеизвестен резонанс 1:1 ($K=2$) частот вращения Луны вокруг оси и ее обращения вокруг Земли. Среди движений планет Солнечной системы самым известным является резонанс частот обращений Юпитера и Сатурна вокруг Солнца: для них $5\Omega_S - 2\Omega_J = 0.033\,\Omega_S \approx 0$.

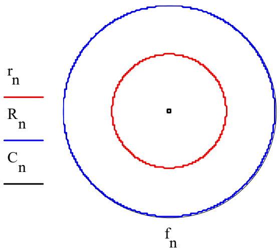

Рис. V01A.2 Кинематический резонанс
Для движения по круговым орбитам в поле тяготения неподвижного центра отношению частот $\Omega_S/\Omega_J = 2/5$ соответствует отношение радиусов показанных на рисунке орбит $R_S/R_J = (2/5)^{-2/3} = 1.84$.

Третьим примером укажем резонанс частот обращения спутников Юпитера - Ио, Европы и Ганимеда. Средние движения этих спутников подчиняются соотношению

$$\Omega_I - 3\Omega_E + 2\Omega_G = 0 \qquad (3)$$

в пределах точности наблюдений (до девяти значащих цифр) [Г75, с.217]. Мы будем называть резонанс такого типа ***кинематическим резонансом***.

◆ Сходство двух приведенных выше определений резонанса проявляется только в связи с возможным совпадением двух частот.

Отличий гораздо больше: в определении линейного резонанса сравниваются частоты реального и воображаемого движений, а в определении кинематического резонанса - двух реальных движений. Модели Солнечной системы (например, простейшая - модель N материальных точек, взаимодействующих силами тяготения) не являются линейными, не имеют собственных частот (частоты движений определяются начальными условиями), практически не имеют затухания; фактически невозможно изменить соотношения частот, не ясно, что считать откликом. Наконец, кинематический резонанс связан не только с равенством двух частот, но и с любым их рациональным отношением.

◆ Последнее свойство имеет аналог в отклике нелинейных систем. Еще Марен Мерсенн (1639) наблюдал, что звучащая струна данного тона заставляет звучать другую даже и в том случае, когда тон последней на квинту или на октаву выше [Р33, с.115]; в современной терминологии - наблюдалось увеличение отклика при отношении частот 3:2 и 2:1.

Для описания таких явлений принципиально необходимо использовать нелинейные модели. Удобно обсудить их свойства на примере уравнения Дуффинга (см. V08-10), которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + x^3 = F\cos\omega t\,. \qquad (4)$$

В этой модели важную роль играет критическое значение силы F_c, при малом затухании $\gamma \ll 1$ приблизительно равное $F_c \approx 4\gamma^{3/2}$. При $F \ll F_c$ амплитуда установившихся колебаний очень мала, нелинейный член в левой части ничтожен и свойства модели (4) близки к свойствам линейного осциллятора (1) - в частности, вблизи собственной частоты $\omega_0 \equiv 1$ имеется линейный резонанс. Однако при $F \geq F_c$ свойства установившихся движений качественно меняются. Главной новой чертой является ***мультистабильность*** - возможность существования в некотором интервале частот по крайней мере двух устойчивых периодических колебаний, различающихся по своим характеристикам. Явления, происходящие в этой области параметров, принято описывать как нелинейный резонанс.

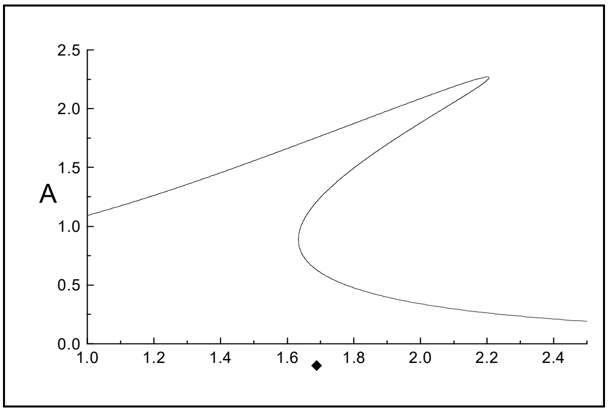

Рис. V01A.3
Нелинейный диссипативный резонанс
Зависимость амплитуды A периодических колебаний диссипативного осциллятора Дуффинга (4) от частоты ω при значениях параметров $\gamma = 0.1$ и $F = 1.0 = 7.80 F_c$. В области частот $1.64 < \omega < 2.20$ существуют два устойчивых и одно неустойчивое колебания с разными амплитудами.

Сходство линейного и нелинейного резонансов заключается в том, что при $F \approx F_c$ отклик системы (4) имеет максимум вблизи частоты $\omega_0 \equiv 1$. Однако некоторые свойства линейного и нелинейного резонансов противоположны. Определим, как это принято (см. напр. [ФЛС65, с.130; РТ84, с.27]), ширину резонанса $\Delta\omega$ как интервал частот, в котором амплитуда отклика отличается от своего максимального значения меньше, чем на фактор $2^{-1/2} = 0.707$. При таком определении при $F << F_c$ (линейный резонанс) ширина резонанса **растет** с увеличением затухания ($\Delta\omega \sim \gamma$), а при $F >> F_c$ (нелинейный резонанс) **убывает** ($\Delta\omega \sim \gamma^{-1/2}$).

Возрастание отклика нелинейной модели (4) имеет место также и вблизи значений частоты, кратных частоте малых колебаний ($\omega = p$, p целое - так называемый *субгармонический резонанс*, см. V09), и вблизи частот, составляющих кратную долю частоты малых колебаний ($\omega = 1/q$, q целое - так называемый *супергармонический резонанс*). В принципе, локальные изменения поведения отклика в модели (4) с достаточно малым затуханием должны проявляться вблизи любых значений частоты внешней силы ω, связанных с частотой малых колебаний системы $\omega_0 \equiv 1$ резонансным соотношением (2) ($\omega = p/q$, p и q целые) [ММ+88, с.122].

В общем случае наличие кинематического резонанса непринципиально для явлений нелинейного резонанса. Например, при больших значениях силы $F >> F_c$ максимум отклика достигается на частотах, далеко отстоящих от частоты малых колебаний (см. рис. 3). Мультистабильность присутствует также и в системах, где собственная частота малых колебаний равна нулю и кинематический резонанс невозможен в принципе - например, в модели [Б69. с.52],

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x^3 = F\cos\omega t\,. \qquad (5)$$

Сказанное позволяет дать следующее определение нелинейного резонанса для систем с затуханием, которое согласуется со сложившейся практикой употребления термина. ***Нелинейным диссипативным резонансом*** для нелинейной системы с затуханием, находящейся под действием гармонической силы, называется область значений параметров, в которой нелинейная система мультистабильна - обладает двумя или несколькими различными устойчивыми периодическими решениями. Если таких решений только два, то решение с большей амплитудой называется резонансным, а с меньшей - нерезонансным колебаниями соответственно.

◆ Переход от диссипативной модели (4) к ее консервативному аналогу исключением затухания ($\gamma = 0$) качественно меняет характер движения. Консервативная система не имеет аттракторов - установившихся движений нет. Почти при всех начальных условиях движение системы

$$\ddot{x} + x + x^3 = F\cos\omega t \qquad (6)$$

квазипериодично и обладает двумя частотами - частотой внешней силы ω и собственной частотой Ω, зависящей от начальных условий (см. V10). В модели (6) при **любой** величине силы F при **всех** достаточно больших частотах $\omega > \omega_c(F)$ существуют по крайней мере два различных устойчивых (орбитально) периодических движения с частотой внешней силы ω, поэтому выделение нелинейного резонанса как области пространства параметров не актуально.

Движение системы (6) и ей подобных при заданных начальных условиях $\vec{x}_0 = \{x(0), \dot{x}(0)\}$ может быть представлено в трехмерном пространстве $\{x, \dot{x}, t\}$ линией L, заданной параметрически значениями координаты $x(t, \vec{x}_0)$, скорости $\dot{x}(t, \vec{x}_0)$ и времени t. Эти линии для разных начальных условий могут обладать различными топологическими свойствами. ***Нелинейным консервативным резонансом*** для нелинейной системы без диссипации, находящейся под действием гармонической внешней силы, называется такая (взятая при данном значении фазы силы) область фазовой плоскости $X - \dot{X}$, что выходящие из нее линии L спиралями охватывают линию L_r резонансного устойчивого периодического движения, но не охватывают линию L_n нерезонансного устойчивого периодического движения.

Взаимное положение линий L удобно показывать, изображая проекции точек этих линий, взятых с интервалом времени, равным периоду внешней силы $T = 2\pi/\omega$, на фазовую плоскость.

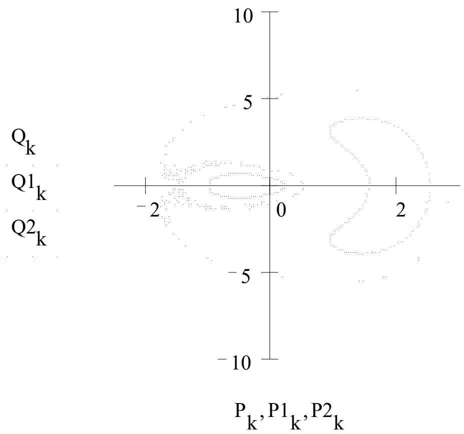

Рис. V01A.4
Нелинейный консервативный резонанс
Точки трех линий L консервативной модели Дуффинга (6) при значениях частоты $\omega = 1.92$ и силы $F = 1.0$ в моменты времени, взятые через период поля $T = 2\pi/\omega$. Красная линия - движение в нелинейном резонансе, синяя - нерезонансное движение, черные точки лежат вблизи границы, отделяющей резонанс от двух нерезонансных областей.

Периодическое решение при этом будет изображаться одной точкой. Для условий примера, показанного на рис. 4, резонансному движению соответствует точка $o_r = \{2.21, 0\}$, а нерезонансному - точка $o_c = \{-0.39, 0\}$. Остальные движения будут изображаться наборами точек, как правило, образующими линии, окружающие одну или обе точки периодических решений.

◆ Выше перечислены четыре смысла термина "резонанс", встречающиеся в теории колебаний. Хотя понятия, для обозначения которых используются этот термин, и являются разнокачественными, описывая

- явление (линейный резонанс);
- соотношение (кинематический резонанс);
- область значений параметров (нелинейный диссипативный резонанс);
- область значений переменных (нелинейный консервативный резонанс);

но все же имеют точки соприкосновения в предельных случаях. Обычно из контекста ясно, о каком типе резонанса идет речь в рассматриваемом примере, поэтому мы будем использовать полные названия лишь изредка.

Толкование термина не исчерпано (например, мы не коснулись понятия "параметрический резонанс" - см. V12), но сказанного достаточно для начала.

ЛИТЕРАТУРА

[Р33] Розенбергер Ф. История физики. Часть вторая. История физики в новое время. - М. -Л., ГНТИ, 1933. - 341 с.

[ФЛС65] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Том 2. Пространство, время, движение. М.: Мир, 1965. - 166 с.

[Б69] Блакьер О. Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. - 400 с.

[Г75] Голдрайх П. Объяснение частой встречаемости соизмеримых средних движений в солнечной системе. - с. 217 - 247. В сб: "Приливы и резонансы в Солнечной системе". М.: Мир, 1975. - 287 с.

[РТ84] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. 2-е изд. М.: Наука, 1984. - 432 с.

[ММ+88] Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1988. - 392 с.

[А89] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. 3-е изд. - М.: Наука, 1989. - 472 с.

☯