V01 КИНЕМАТИКА КОЛЕБАНИЙ: МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ

◆ Задачи теории колебаний связаны с исследованием зависимости физических величин от времени t. Зависимость $z(t)$ называется ***законом движения***, или ***движением***. Для описания движений используется ряд взаимосвязанных моделей. Описание этих моделей составляет задачу кинематики.

§ 01 Периодические колебания

◆ Базовая модель колебательного движения - ***гармоническое колебание***, при котором некоторая физическая величина $z(t)$ изменяется по закону

$$z(t) = A\sin(\Omega t + \psi_0). \tag{1}$$

Значение $z = 0$ называется ***положением равновесия***. Величина максимального отклонения от положения равновесия $A > 0$ называется ***амплитудой*** гармонического колебания. Величина $\psi(t) = \Omega t + \psi_0$, линейно возрастающая со временем, называется ***фазой*** гармонического колебания, а ψ_0 - ***начальной фазой***.

✧ Модель гармонического колебания описывает исключительный тип движения, при котором все процессы обладают единственным характерным временем - периодом колебаний $T = 2\pi/\Omega$. Такое движение может реализоваться в различных моделях - например, в модели свободных колебаний гармонического осциллятора (консервативная система) или в модели установившихся вынужденных колебаний линейного осциллятора с затуханием под действием гармонической силы (диссипативная система).

◆ Одним из обобщений базовой кинематической модели является модель периодических колебаний. ***Периодическое колебание*** есть изменение во времени физической величины $z(t)$, при котором все значения z периодически повторяются. Минимальное время $T > 0$ повторения любых значений физической величины, $z(t) = z(t + T)$, называется ***периодом колебаний***. Величина

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

называется ***частотой периодического движения***. Для гармонического колебания (1) частота периодического движения равна скорости изменения фазы:

$$\Omega = \dot{\psi}. \tag{3}$$

◆ Периодическое колебание может быть представлено в виде линейной комбинации гармонических колебаний, называемой ***рядом Фурье***. Если $z(t)$ - периодическая функция с периодом T, то

$$z(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t), \tag{4}$$

где коэффициенты a_k и b_k заданы формулами

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T z(t)\, \cos k\Omega t\; dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T z(t)\, \sin k\Omega t\; dt. \tag{5}$$

Компонента разложения периодического колебания в ряд Фурье, имеющая частоту $k\Omega$, называется ***k-й гармоникой*** колебания. Величина

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad (6)$$

(при $k \geq 1$) называется ***амплитудой k-й гармоники*** колебания. Периодические колебания, содержащие в своем Фурье-разложении гармоники, отличные от первой, называются ***ангармоническими колебаниями***.

◆ Разложение периодического колебания в ряд Фурье иногда принято записывать в другом виде, используя экспоненциальные функции от комплексного аргумента:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k \exp(ik\Omega t). \qquad (7)$$

Поскольку физическая величина $z(t)$ должна быть действительной, фурье-амплитуды разложения (7) связаны соотношением $Z_k = Z_{-k}^*$ (здесь и далее звездочка означает комплексное сопряжение).

◆ Если периодическое колебание представлено в виде ряда Фурье (4), то величина

$$\nu = \frac{1}{a_1^2 + b_1^2} \sum_{m=2}^{\infty} \left(a_m^2 + b_m^2\right) \qquad (8)$$

называется ***коэффициентом ангармонизма*** периодических колебаний.

✧ **Пример 1.** Вычислим коэффициент ангармонизма периодического симметричного пилообразного колебания с периодом $T = 4\,L/v$ и законом движения на периоде

$$x(t) = vt\ (t < L/v),\ x(t) = 2L - vt\ (L/v < t < 3L/v), \\ x(t) = -4L + vt\ (3L/v < t < 4\,L/v). \qquad (9)$$

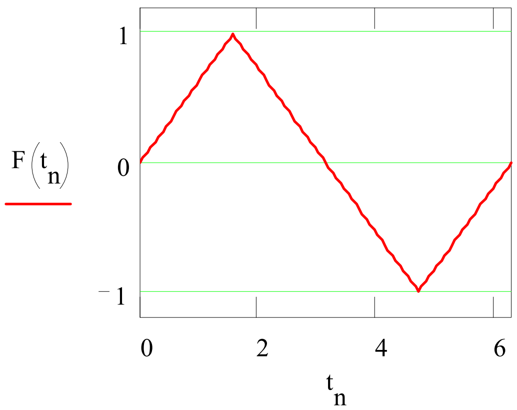

Рис. V01.1
Симметричный пилообразный закон движения.

Такая модель, например, описывает координату частицы, свободно движущейся со скоростью v между жесткими стенками в точках $x = L$ и $x = -L$ и упруго отражающейся от них. Разложение закона движения в ряд Фурье имеет вид

$$x(t) = -\frac{8}{\pi^2} L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)\Omega t, \qquad (10)$$

откуда для коэффициента ангармонизма получаем

$$\nu = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96} - 1 = 0.0147. \qquad (11)$$

✧ **Задача 01.1.** Вычислить коэффициент ангармонизма для скорости $\dot{x}(t)$ процесса с симметричным пилообразным законом движения (9).

◆ Численное определение коэффициента ангармонизма ν полезно тем, что позволяет оценить эффективное число гармонических компонент, которые надо учесть при приближенном решении уравнений движения в аналитической теории. Такая оценка дается числом $N = 1 + \nu$. Приведенный выше примеры показывают, что даже разрывность закона движения $x(t)$ не влечет большого ангармонизма. Большая величина ν свойственна движениям, в которых или поведение физической величины на периоде является сложным - имеет много нулей и экстремумов (см. рис. V01.2), или представляет собой последовательность резких выбросов – импульсов.

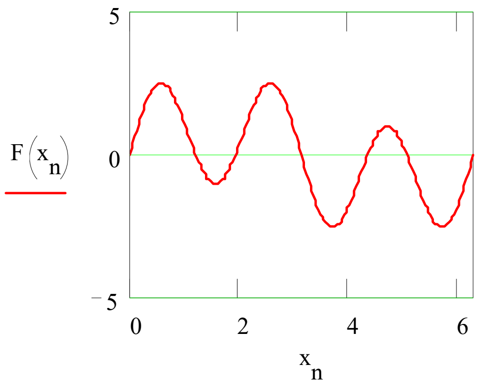

Рис. V01.2
График функции $x(t) = \sin\Omega t + 2\sin 3\Omega t$, которой соответствует значение коэффициента ангармонизма $\nu = 4$, на одном периоде.

◆ Периодические колебания, при которых скорость изменения величины $x(t)$ сильно неравномерна (например, принимает большие значения лишь на малой части периода), называются ***релаксационными***.

Степень неравномерности изменений скорости может быть характеризована ***коэффициентом релаксационности*** ρ - отношением среднего (на периоде движения) квадрата скорости к квадрату средней (на периоде движения) величины модуля скорости:

$$\rho = \frac{\overline{v^2}}{\left(\overline{|v|}\right)^2}, \qquad (12)$$

где

$$\overline{v^2} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt, \qquad \overline{|v|} = \frac{1}{T}\int_0^T \left|\frac{dx}{dt}\right| dt \qquad (13)$$

Для симметричного пилообразного колебания (9) коэффициент релаксационности $\rho = 1$.

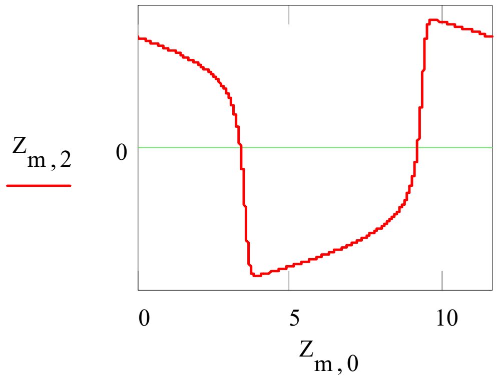

Рис. V01.3
Релаксационное колебание с коэффициентом релаксационности $\rho = 5.1$.

§ 02 *Квазипериодические колебания*

◆ Обобщением модели периодических колебаний, допускающих разложение в ряд Фурье (5), являются ***квазипериодические колебания***, при которых зависимость $z(t)$ может быть представлена в виде разложения в кратный ряд Фурье,

$$z(t) = \sum_{k,l..n=-\infty}^{\infty} Z_{k,l,..n} \exp\left(i\left[k\Omega_1 + l\Omega_2 + \ldots n\Omega_N\right]t\right), \qquad (14)$$

с двумя или несколькими независимыми частотами Ω_i $(1 \le i \le N)$.

◆ Простейшим примером квазипериодического движения является линейная комбинация двух гармонических колебаний с независимыми частотами

$$z(t) = A_1 \sin(\Omega_1 t + \psi'_0) + A_2 \sin(\Omega_2 t + \psi''_0). \qquad (15)$$

Эта модель имеет специальное название *бигармонического колебания*.

✧ Такой закон движения встречается, например, при описании колебаний двух линейных осцилляторов с линейной связью и при описании движения гармонического осциллятора с собственной частотой Ω_1 под действием гармонической внешней силы с частотой Ω_2.

◆ Частоты Ω_i $(1 \le i \le N)$ удовлетворяют *резонансному соотношению* порядка K [A89, с.353], если существуют целые не все равные нулю числа k_i, для которых

$$\sum_{i=1}^{N} k_i \Omega_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} |k_i| = K \qquad (16)$$

[A89] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. 3-е изд. - М.: Наука, 1989. - 472 с.

Если частоты Ω_i удовлетворяют резонансному соотношению конечного порядка, то говорят, что в системе имеется ***резонанс*** (для отличия от других типов резонанса будем называть его ***кинематическим резонансом***). Если частоты Ω_i не удовлетворяют резонансному соотношению конечного порядка, то они называются *независимыми*. Для квазипериодического движения с двумя частотами условие независимости

$$k\Omega_1 \ne l\Omega_2 \qquad \left(\forall k,l \in \mathrm{Z},\ k,l \ne 0\right) \qquad (17)$$

эквивалентно утверждению о том, что отношение этих частот иррационально.

◆ Иррациональность отношения частот не может быть проверена экспериментально: для такой проверки требуется **бесконечно высокая точность** измерения частот, а значит - и самой физической величины $z(t)$. С физической точки зрения две частоты $\Omega_1 < \Omega_2$, отношение которых обозначим $\alpha = \Omega_1/\Omega_2 < 1$, можно считать независимыми, если число α **плохо** приближается рациональным числом. Для того, чтобы иметь возможность говорить о том, что число α аппроксимируется плохо, его надо приблизить наилучшим образом. Такая аппроксимация связана с разложением числа α $(0 < \alpha < 1)$ в *цепную* (непрерывную) *дробь* (continued fraction)

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} \qquad (18)$$

где a_i - целые числа. Для выражения (18) принята также сокращенная запись $\alpha = [a_1, a_2, a_3, ..]$. Обрывая разложение (18) на n-м члене, получим рациональное число $\overline{\alpha}_n = p_n/q_n$, которое называется n-й *подходящей дробью* (n-th convergent) разложения. Числа p_n и q_n определяются рекуррентными формулами

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}, \qquad q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \qquad (19)$$

с начальными значениями $p_0 = 0, q_0 = 1, p_1 = 1, q_1 = a_1$. Дробь $\overline{\alpha}_n$ является **наилучшим** приближением для иррационального числа α среди всех дробей с равными или меньшими знаменателями.

◆ Для погрешности n-й подходящей дроби $\overline{\alpha}_n = p_n/q_n$ элементарно доказывается [Х78, с.17] неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}. \qquad (20)$$

[Х78] Хинчин А.Я. Цепные дроби. - М.: Наука, 1978. - 112 с.

Оно показывает, что говорить о приближенном выполнении резонансного соотношения между частотами (о резонансе) уместно, если левая часть неравенства (20) оказывается много меньше установленного для нее верхнего предела - если *резонансный индекс*

$$R_n(\alpha) = q_n \left| \alpha q_n - p_n \right|. \qquad (21)$$

мал по сравнению с единицей.

✧ **Пример 2.** Среди движений планет Солнечной системы самым известным является резонанс частот обращений Юпитера (сидерический период $T_J = 4332.6$ *сут*) и Сатурна ($T_S = 10759.2$ *сут*). Отношение частот этих движений $\Omega_S/\Omega_J = [2, 2, 14, 2, ..]$ первой подходящей дробью имеет $\overline{\alpha}_1 = 2/5$. Соответствующий резонансный индекс действительно мал: $R_2(\alpha) = 0.067$.

✧ **Пример 3.** Число π может быть представлено в виде $\pi = 3 + \alpha$, где $\alpha = [7, 15, 1, 292, ...]$. Первая походящая дробь дает $\pi \approx 22/7$, известное как приближение Архимеда. Ограничиваясь третьей подходящей дробью, получаем приближение $\pi \approx 355/113$. Для этого приближения $R_3(\pi - 3) = 3.4 \cdot 10^{-3}$ - резонанс 468 порядка обладает высокой точностью.

✧ **Задача 01.2.** Исследовать соотношение между резонансными индексами чисел α и α^{-1}.

◆ Укажем еще один подход к вопросу о наличии кинематического резонанса. Выполнение между частотами Ω_i резонансного соотношения высокого порядка (пусть даже с большой точностью) не влияет существенно на динамику системы: модель квазипериодического колебания может эффективно использоваться и в этом случае. Поэтому частоты можно считать Ω_i независимыми, если в пределах ошибок измерений между ними нет резонансного соотношения с достаточно малыми числами $|k_i|$. Так, в небесной механике принято засчитывать как резонансные только соотношения вида (16) с $|k_i| \le 7$. [М73, Г75].

[М73] Молчанов А.М. О резонансной структуре Солнечной системы. - с. 32 - 41. В сб: "Современные проблемы небесной механики и астродинамики". - М.: Наука, 1973. - 340 с.
[Г75] Голдрайх П. Объяснение частой встречаемости соизмеримых средних движений в солнечной системе. - с. 217 - 247. В сб: "Приливы и резонансы в Солнечной системе". М.: Мир, 1975. - 287 с.

◆ Во многих задачах частоты Ω_i зависят от параметров и/или начальных условий и непрерывно изменяются вместе с ними. В семействах таких движений присутствуют как квазипериодические (в математически строгом смысле), так и периодические зависимости от времени. В теории колебаний принято считать квазипериодическим любое движение, которое допускает эффективное представление с помощью разложения (14).

§ 03 Модулированные колебания и релаксация

◆ Другим обобщением базовой модели (1) является ***модель квазигармонических колебаний***, или ***модулированных гармонических колебаний***, в которых закон изменения физической величины $z(t)$ представляется в виде

$$z(t) = A(t)\sin(\Omega t + \Theta(t)). \qquad (22)$$

Функции времени $A(t)$ и $\Theta(t)$ называются *переменной амплитудой* и *переменной фазой* соответственно. Движения вида (22) в общем случае не являются периодическими. Однако они во многом подобны периодическим колебаниям, если скорости изменения переменных амплитуды и фазы малы:

$$\dot{A} \ll A\Omega,\ \dot{\Theta} \ll \Omega. \qquad (23)$$

✧ Представление решений уравнений движения в виде (22) с амплитудой и фазой, удовлетворяющим сильным неравенствам (23), лежит в основе метода медленно меняющихся амплитуд - одного из важнейших приближенных методов теории колебаний.

◆ С помощью модели модулированных колебаний описываются, в частности, затухающие колебания - движение физической величины, немонотонно стремящейся к положению равновесия $z(t)=0$. Важнейшим примером являются экспоненциально затухающие гармонические колебания с законом движения

$$z(t) = A_0 e^{-\delta t} \sin(\Omega t + \psi_0). \tag{24}$$

Величина δ называется ***логарифмическим декрементом затухания***. Периодом такого движения условно считается величина $T = 2\pi/\Omega$, что оправдано при малой величине логарифмического декремента затухания, $\delta << \Omega$, когда изменение амплитуды колебаний за период мало.

✧ Приведем еще два примера модулированных колебаний. Закон движения (24) с постоянной фазой $\Theta = \psi_0$ и **линейно** растущей амплитудой,

$$x(t) = -\frac{F}{2\Omega} t \cos\Omega t, \tag{25}$$

описывает колебания координаты гармонического осциллятора под действием резонансной гармонической внешней силы. ✧ Закон движения (24) с постоянной фазой $\Theta = \psi_0$ и **экспоненциально** растущей амплитудой,

$$x(t) = A_0 e^{\delta t} \sin(\Omega t + \psi_0), \tag{26}$$

описывает приближенный вид колебаний координаты параметрически возбуждаемого осциллятора в зоне параметрического резонанса (см. V12).

◆ В некоторых случаях движение может быть описано разными моделями. Например, бигармоническое движение (17) с равными амплитудами и близкими частотами гармонических компонент,

$$z(t) = A\sin\Omega_1 t + A\sin\Omega_2 t, \tag{27}$$

может быть представлено как квазигармоническое амплитудно модулированное движение

$$z(t) = 2\cos\Delta t \cdot \sin\overline{\Omega} t \tag{28}$$

где

$$\Delta = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}, \qquad \overline{\Omega} = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} \tag{29}$$

В этом представлении при $\Delta << \overline{\Omega}$ изменение амплитуды квазигармонического движения называется ***биениями***.

◆ Физическая величина может стремиться к положению равновесия $z(t)=0$ не только совершая затухающие колебания, подобно закону (24), но и монотонно. Примером такого движения является зависимость

$$z(t) = A_0 e^{-\gamma t}, \tag{30}$$

описывающая экспоненциальную релаксацию динамической величины к положению равновесия. Величину γ называют *скоростью релаксации*. Хотя движение (30) обычно не относят к колебательным, его включение в перечень основных моделей движения необходимо для полноты.

✧ Закон (30) описывает движение линейного осциллятора с затуханием - системы с уравнением движения

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (31)$$

при значениях параметров $\omega_0 > \delta$; при этом $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. При выполнении обратного неравенства, $\omega_0 < \delta$, движение системы описывается законом

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma_1 t} + A_2 e^{-\gamma_2 t} \qquad (32)$$

со скоростями релаксации

$$\gamma_{1,2} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \qquad (33)$$

Такой линейный осциллятор называют *перезатухшим* (overdamped).

◆◆ *Рассмотренными выше типами движения, а именно:*

- гармоническим, H (1);

- периодическим, P (4);

- квазипериодическим, QP (14);

- модулированным гармоническим, MH (квазигармоническим) (22);

- релаксацией R (30),

исчерпывается список моделей движения, применяемых в теории колебаний.

☯