ЗАНЯТИЕ 8. 25.10.02

1. Разбор домашних задач.

Рассмотрим решения некоторых из предлагавшихся домашних задач.

P21. "**Raider**"

Одной из форм боевых действий на море является рейдерство. Одиночно плавающие корабли - рейдеры топят или захватывают грузовые корабли противника.

В качестве рейдеров часто используются так называемые вспомогательные крейсеры - обычные грузовые корабли, снабженные артиллерийским вооружением среднего (около 150 мм) калибра. Типичным примером можно считать немецкий рейдер "Komet", оперировавший в 1940 - 1941 гг. в Тихом, Индийском и Атлантическом океанах. Он имел водоизмещение 7500 т и максимальную скорость 14 узлов.

Оценить эффективность рейдерства - среднюю частоту побед рейдера для условий второй мировой войны. Считать, что рейдер топит/захватывает *каждый* встреченный им грузовой корабль противника (это предположение хорошо подтверждается практикой).

1. Оценим плотность, с которой распределены в океане возможные жертвы.

Площадь Мирового океана $S = 3.62 \cdot 10^8$ $км^2$.

Численность торговых судов на 1941 год отыскать не удалось. Попались данные на конец 1993 года (80655 судов с общей вместимостью 458 миллионов брт [1]) и на 1901 г. (мировой тоннаж торгового флота 22 миллиона брт [2, с.4]). Будем считать, что рост тоннажа между этими датами происходил равномерно по экспоненциальному закону (геометрической прогрессии). Тогда тоннаж на 1941 год равен $C_{41} = 81 \cdot 10^6$ $брт$. Из приведенных данных следует, что средняя вместимость современного торгового корабля $V_{93} = 5678$ $брт$. По общим соображениям в начале века она была существенно меньше - порядка 1000 брт. Принимая тот же вид закона для роста средней вместимости, для 1941 года получаем $V_{41} \approx 2100$ $брт$. Таким образом, для численности мирового торгового флота в 1941 году получаем оценку $N_{41} \approx 38600$ судов.

Будем считать, что половина всех судов находилась в каждый данный момент в море, а вторая половина стояла в портах - под погрузкой или ожидая фрахта. Далее, будем считать, что из находящихся в море судов половина - суда противника (возможные жертвы), а половина - суда союзных и нейтральных стран. Тогда число возможных жертв $n_{41} = N_{41}/4 \approx 9600$. В среднем одна жертва приходилась на

$$s = S/n \approx 3.8 \cdot 10^4 \ км^2 \qquad (21.1)$$

поверхности Мирового океана.

2. Оценим теперь площадь водной поверхности, которую видно с рейдера в течение одних суток плавания. Будем считать, что плавание проходит на экономической скорости, вдвое меньшей максимальной - $v = 7$ *узлов* $= 13$ км/час. Будем также считать, что с мостика рейдера видно все до горизонта.

Для подсчета дальности горизонта надо знать высоту мостика. Оценим ее по заданному водоизмещению: объем находящейся под водой части судна равен $V = 7500\ м^3$. Обычно осадка грузовых судов D не превосходит 6 *м* (это обеспечивает возможность использования практически всех портовых бухт). Пусть длина судна по ватерлинии L; ширина судна обычно примерно в семь раз меньше его длины, $W = L/7$. Считая форму судна в плане эллиптической, получаем уравнение

$$\frac{\pi}{4} L \cdot \frac{L}{7} \cdot D = 7500 \qquad (21.2)$$

откуда после подстановки D находим $L = 105\ м$. По известному рисунку корабля определяем высоту мостика: $h = 15\ м$. Дальность горизонта H при наблюдении из точки с высотой h над земной поверхностью определяется формулой $H = \sqrt{2hR}$, где $R = 6400\ км$ - радиус Земли. Итак, расстояние до горизонта $H = 14\ км$.

Корабли могут быть замечены только в светлое время суток, продолжительность которого в среднем $T = 12$ *час/сутки*. Таким образом, скорость просмотра поверхности океана с мостика рейдера составляет

$$\dot{s} = v \cdot T \cdot 2H \approx 4400 \ км^2 / сутки. \qquad (21.3)$$

3. Допустим, наконец, что корабли - жертвы случайно, в среднем **равномерно** распределены по поверхности Мирового океана и **неподвижны**. Тогда одна жертва будет встречена в среднем за то время, за которое будет осмотрена площадь моря, приходящаяся на одну жертву; оно составляет

$$\Delta t_T = \frac{s}{\dot{s}} \approx 8.6 \ суток. \qquad (21.4)$$

Это значение составляет окончательный ответ задачи.

4. Сравним его с фактическими данными из работы [3]. За 516 суток плавания рейдер "Komet" потопил 9 торговых судов суммарным тоннажем 57000 брт и захватил одно судно в 7300 т. Таком образом, средний интервал между акциями составил

$$\Delta t_E = 51.6 \text{ } \textit{суток}. \tag{21.5}$$

Практическая эффективность оказалась **в 6 раз меньше** теоретической оценки.

Основной причиной отклонений является неравномерность распределения судов в океане: они сосредоточены вблизи некоторых "морских путей". При перебазировании в новый район действий рейдеру приходится обходить эти пути, вблизи которых высока концентрация военных кораблей противника, к сражению с которыми рейдер не приспособлен. Так, при переходе через Тихий океан к берегам Чили "Komet" не встретил ни одного судна в течение 227 суток подряд. При перебазировании в восточную часть Индийского океана корабль обходил морские пути в течение 127 суток. Таким образом, "рабочее" время похода составляло 162 суток, или 31% от продолжительности рейдерства - что дает для среднего интервала между акциями $\Delta t'_E = 16.2$ *суток*, что менее чем вдвое отличается от теоретической оценки.

С другой стороны, пиковая эффективность была значительно выше средней (3 корабля за 5 суток), что подтверждает важность учета неравномерности.

Сравним другие основанные на допущениях оценки с фактическими значениями. Средний тоннаж жертв "Komet" составлял около 6400 брт, что втрое выше принятой нами оценки среднего тоннажа судов. Возможно, это значит, что тоннаж судов океанского плавания заметно отличается от среднего по мировому флоту. Далее, за время рейдерства "Komet" прошел путь в 87000 морских миль, что соответствует средней скорости плавания в 7 узлов - в хорошем согласии с нашей оценкой.

Наконец, обратимся к данным для других рейдеров.

Рейдер "Pinguin" за срок "более года" одержал победы над судами с общим тоннажем 180000 брт. Приняв срок в $365\times1.25 = 456$ дней и тот же средний тоннаж, что у жертв "Komet", получаем $\Delta t_E = 16.3$ *суток*, что практически совпадает с поправленными данными для "Komet".

Рейдер "Atlantis" за, примерно, 670 суток крейсерства потопил 22 судна с общим тоннажем 144000 брт. Это дает для среднего тоннажа жертвы 6500 брт - почти то же значение, что и для жертв "Komet", и средний интервал $\Delta t_E = 30.4$ *суток*, что почти вдвое больше поправленного значения для "Komet", но в полтора раза меньше исходного.

5. Основной вывод: построенная теория эффективности рейдерства представляет удовлетворительную теорию нулевого приближения. Для ее уточнения следует внести, в первую очередь, следующие изменения:

1) учесть распределение по тоннажу судов океанского плавания, фактически находящихся в плавании в данный момент времени (например, может оказаться, что большие суда дольше грузятся, или дольше ждут фрахта, или ходят преимущественно в конвоях и пр.)

2) учесть, на основе анализа боевого опыта рейдеров, безопасную долю времени плавания в зоне морских путей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ЗАДАЧЕ Р21.

[1] Encyclopedia Britannica - 1998, CD version; Book of the Year 1995, Transportation: Shipping and ports.

[2] Балакин С.А. Винджаммеры: "Падуя" и другие. Морская коллекция, 1998, №3(12), с. 1-40.

[3] В.Ф. Воробьев. Кругосветка рейдера «Komet». Часть 1: Гангут, вып. 16 (1998), с. 83-97; часть 2: Гангут, вып. 19 (1999), с.75-86. ■

P16. Оценить, при какой минимальной высоте H круговой орбиты над поверхностью Земли искусственный спутник размером $L = 1$ м и массой $M = 1$ т не претерпит заметных изменений своего движения в течение года.

Для решения задачи можно использовать фрагменты решений задач P04 (занятие 3) и P10 (занятие 4). Силу сопротивления воздуха можно оценить квадратичным законом

$$F_2 \sim \rho v^2 L^2 \qquad (16.1)$$

Из уравнения движения получаем оценку τ - характерного времени изменения скорости спутника:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\dot{v}}{v} \sim \frac{\rho v L^2}{M} \qquad (16.2)$$

Зависимость плотности воздуха от высоты опишем барометрической формулой для изотермической атмосферы:

$$\rho(H) = \rho_0 e^{-\frac{H}{h}}. \qquad (16.3)$$

где $\rho_0 = 1.22 \cdot 10^{-3}$ г см$^{-3}$ - плотность воздуха у поверхности Земли, а характерная высота атмосферы

$$h = \frac{kT}{m_p A g} = \frac{RT}{\mu g} = 8.47 \text{ км}. \qquad (16.4)$$

Таким образом получаем оценку

$$H = h \ln \frac{\tau \rho_0 v L^2}{M} \qquad (16.5)$$

Взяв $\tau = 10\,\textit{лет} = 3.1\cdot 10^8\,\text{c}$, а в качестве v - скорость движения спутника на круговой орбите у поверхности Земли, $v \approx 7.9\cdot 10^5\ \text{см}\,\text{c}^{-1}$, получаем

$$H = 21.8h = 185\,\text{км}. \tag{16.6}$$

На самом грубом уровне оценка неплоха.

Однако при ее выводе не было учтено, что уже при малом изменении скорости спутник перейдет на эллиптическую орбиту, которая может пересечься с поверхностью Земли. Рассмотрим орбиту с максимальной высотой $H = \eta R$ $(\eta << 1)$ и минимальной высотой 0 (касание поверхности Земли). Скорости в точках максимальной и минимальной высоты связаны законом сохранения углового момента $v_-(1+\eta) = v_+$. Учитывая закон сохранения полной механической энергии (скорость - в единицах первой космической),

$$-\frac{1}{1+\eta} + \frac{v_-^2}{2} = -\frac{1}{1} + \frac{v_+^2}{2} \tag{16.7}$$

находим значение скорости на максимальной высоте:

$$v_- \approx 1 - \frac{3}{4}\eta. \tag{16.8}$$

В то же время скорость движения по круговой орбите на высоте $H = \eta R$ равна

$$v_0 \approx 1 - \frac{1}{2}\eta \tag{16.9}$$

Таким образом, критическое изменение начальной скорости составляет $\Delta v = v\eta/4$.

Для спутника с начальной высотой $H = 185\,\text{км}$ (в отсутствие сил сопротивления) критическое изменение начальной скорости $\Delta v = 0.007v$. В итоге получаем уточненную оценку -

$$H' = h\ln\left(\frac{\tau\rho_0 v L^2}{M}\cdot\frac{v}{\Delta v}\right) = 26.8h = 227\ \text{км}. \tag{16.10}$$

Первый искусственный спутник Земли, запущенный в СССР 4 октября 1957 года, обращался по эллиптической орбите с минимальным расстоянием от Земли $H_0 = 230$ км и просуществовал около 4 месяцев. ■

P11. Может ли элементарная частица превратиться в черную дыру?

Согласно сказанному в §1 занятия 4, наименьший размер области пространства, в которой может быть локализована <u>одна</u> частица массы M, определяется ее комптоновской длиной волны

$$ƛ_c = \frac{\hbar}{Mc}. \tag{11.1}$$

Частица сможет превратиться в черную дыру, если эта длина станет меньше гравитационного радиуса частицы (см. P09A, занятие 3)

$$R_g = 2\frac{GM}{c^2}. \tag{11.2}$$

Из условия $ƛ_c = R_g$ получаем (опустив двойку в формуле для R_g):

$$M = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.17 \cdot 10^{-5} \text{ г} \tag{11.3}$$

Таким образом, критическая масса частицы совпадает с планковским масштабом массы (см. P01, занятие 2). ■

P20. “Butterfly soup”

В кастрюлю (сосуд с плоским дном большой площади) налит слой воды толщиной $H = 3$ см. Сосуд подогревается снизу. Оценить, при какой разности температур ΔT между дном и верхней поверхностью воды в кастрюле возникнет конвективное течение.

Для того, чтобы молекула воды с дна могла подняться на поверхность, ей надо затратить энергию

$$E_1 = mgh. \tag{20.1}$$

В то же время относительно молекул на поверхности у нее есть избыток энергии

$$E_2 = \frac{7}{2}k\Delta T, \tag{20.2}$$

где коэффициент определен из соображений количества степеней свободы молекулы. Конвекция начнется при выполнении условия $E_2 \geq E_1$, откуда

$$\Delta T \geq \frac{2mg}{7k}h = \frac{2\mu g}{7R}h \approx 6*10^{-3}h \approx 18*10^{-3}\,\text{К} \tag{20.3}$$

Точное решение этой задачи, полученное в §4 “Гидродинамики” Ландау и Лифшица [ЛЛVI], имеет вид

$$\frac{dT}{dh} \geq \frac{g\beta T}{c_p}, \tag{20.4}$$

где $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dT}\right)_p$ - коэффициент объемного расширения. Это решение совпадает с нашим для случая идеального газа, а для воды при температуре 30 C° $\beta \approx 0.3*10^{-3}$ К$^{-1}$, и мы получаем

$$\Delta T \geq 0.5*10^{-3}h \approx 1.5*10^{-3}\text{К}, \qquad (20.5)$$

что примерно на порядок меньше нашей оценки.

Дальнейшее образование ячеек Бенара на поверхности жидкости в результате конвекции будет определяться зависимостью коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Оценка размеров этих ячеек является другой задачей, вообще говоря - более сложной. ■

P23. Для компакт-диска:
а) оценить максимально возможную скорость вращения;
б) измерить реальную скорость вращения в CD-ROM.

а). Центробежные силы способны оторвать молекулу от диска, если при перемещении молекулы на атомное расстояние они совершат работу, равную атомной энергии:

$$m\omega^2 R a_m \sim E_m \qquad (23.1)$$

откуда

$$\omega \sim \sqrt{\frac{E_m}{mRa_m}} \sim 10^9 c^{-1} \qquad (23.2)$$

На самом деле, несомненно, диск вращается значительно медленнее. Отчасти это связано с тем, что информацию, снятую с него, еще нужно успеть прочитать. Быстродействие современных фотодетекторов обычно не превышает наносекунды, а время, за которое необходимо произвести считывание одного бита, обратно пропорционально частоте вращения:

$$\tau = \frac{\lambda}{\omega R} \qquad (23.3)$$

откуда максимальная частота вращения

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi R \tau} \approx 1.6\,\text{кГц}, \qquad (23.4)$$

или 100000 оборотов в минуту.

б). Измерим теперь реальную частоту вращения компакт-дисков. Как известно, однократная скорость вращения компакт-диска соответствует скорости передачи данных 150 кб/с, откуда для частоты вращения получаем 200 об/мин для внешних дорожек и 530 об/мин - для внутренних. Казалось бы, это означает, что для наиболее скоростных 52-х-скоростных приводов CD-ROM частота вращения меняется от 10400 до 27660 оборотов в минуту, то есть превышает скорость вращения винчестеров.

Произведем непосредственные измерения. Измерения производились при помощи пишущего привода CD-RW TEAC 32×8×4. Воспользовавшись тем, что запись на диск всегда начинается с внутренних дорожек, запишем файл размеров 100 Мб на болванку, засекая время записи, далее заполним почти весь ее объем чем-нибудь еще и снова запишем файл размером 100 Мб. Затем измерим время считывания обоих файлов. ×Результаты измерения приведены в таблице:

CD	Время записи, с	Скорость вращения	Время чтения, с	Скорость вращения
Внутренние дорожки	84	7.9	43	15.5
Внешние дорожки	82	8.1	22	30.3

Таким образом, скорость записи оказывается постоянной, то есть частота вращения падает при возрастания диаметра дорожки, тогда как при чтении скорость записи внешних дороже оказывается в два раза больше, что означает практически постоянную частоту вращения.

Оказывается, это связано с современной технологией изготовления CD-ROM: частота вращения компакт-диска является переменной при скоростях записи-чтения не более 12-ти-кратных, но постоянной - при больших скоростях. В нашем случае запись производится с 8-ми-кратной скоростью, при которой CD-ROM изменяет частоту вращения, обеспечивая постоянство скорости записи. В то же время, чтение происходит с большими скоростями, поэтому CD-ROM фиксирует частоту вращения, обеспечивая 30-ти-кратную скорость записи на внешних дорожках, но только 16-ти-кратную - на внутренних. Таким образом, если у вас есть 52-х-кратный CD-ROM, то это означает 52-х-кратную скорость только на внешних дорожках, на внутренних же она примерно в два раза меньше. ■

P12. Оценить коэффициент поверхностного натяжения для ядерной материи - протонов и нейтронов, составляющих атомное ядро.

Фактически надо повторить рассуждение примера S03 (занятие 1). По физическому смыслу σ есть поверхностная плотность энергии. Ее размерность $[\sigma] = \mathrm{EL}^{-2} = \mathrm{MT}^{-2}$. Масштаб нужной размерности строится из масштабов энергии E_n и длины a_n. В качестве характерной энергии возьмем типичную энергию связи ядер в расчете на один нуклон: $E_n \approx 8\,\text{МэВ} \approx 1.3 \cdot 10^{-5}\,\text{эрг}$. В качестве характерного расстояния возьмем среднее расстояние между нуклонами в ядре: $a_n \approx 2 \cdot 10^{-13}$ см. Отсюда получаем оценку

$$\sigma_n \sim E_n a_n^{-2} = 3.2 \cdot 10^{20}\ \text{эрг см}^{-2}, \qquad (12.1)$$

что на 16 порядков больше коэффициента поверхностного натяжения жидких металлов.

Сравним с экспериментом. Приравнивая третий член в формуле Вайцзекера - Ферми (см. занятие 7) вкладу поверхностной энергии в массу ядра,

$$0.014\, A^{2/3}\, а.е.м. = \frac{\sigma_n \cdot 4\pi R_n^2}{c^2}, \qquad (12.2)$$

и используя эмпирическую формулу для радиуса ядер $R_n = 1.25 \cdot 10^{-13}\ A^{1/3}$ см, получаем значение

$$\sigma_n = 1.1 \cdot 10^{20}\ \text{эрг см}^{-2} \qquad (12.3)$$

что в три раза меньшее теоретической оценки (см. Z - поправку в S03). ■

☯