ЗАНЯТИЕ 4. 26.04.02

0. Разбор домашних задач.
1. Максимальная сила света (продолжение).
2. Феноменология шаровой молнии.

§0. Разбор домашних задач

Рассмотрим некоторые задачи, предложенные на предыдущих занятиях.

P03. Если все размеры корабля увеличить в λ раз, то как изменятся его ходовые характеристики?

В отличие от самолета, корабль может двигаться со сколь угодно малой скоростью. Возможности корабля характеризуют двумя параметрами - максимальной скоростью V_+ и дальностью автономного (без дозаправки) плавания L при стандартной экономичной скорости V_0. Дальность измеряется в морских милях (1 миля = 1852 м), а скорость - в узлах (1 узел = 1 миля/час = $0.51\,\text{м}\,\text{с}^{-1}$).

Задача разбивается на две: как изменится максимальная скорость хода V_+ - и как изменится дальность автономного плавания L - если все линейные размеры корабля изменятся в λ раз?

Количество энергии, запасенной кораблем, возрастает как объем топливных цистерн, $E \sim \lambda^3$. Как и для самолета, число Рейнольдса $\mathrm{Re} >> 1$, и силу сопротивления можно оценить выражением $F \sim \rho V^2 l^2$, где l - характерный линейный размер корабля. Последний можно определить как величину, пропорциональную кубическому корню из объема водоизмещающей части. Если D - водоизмещение (в тоннах), то l (в метрах) имеет численное значение $l \approx D^{1/3}$. Таким образом, для дальности автономного плавания получаем оценку

$$L \sim \frac{E}{F} \sim \lambda, \tag{01}$$

она пропорциональна линейным размерам корабля.

В приведенной ниже таблице собраны значения параметров для различных кораблей, участвовавших в боевых столкновениях между США и Японией в Тихом океане во время 2-й мировой войны. Из седьмой колонки таблицы видно, что параметр $LV_0^2 l^{-1}$, хотя и не является постоянным, но меняется не очень сильно. Некоторое спадание параметра для больших кораблей можно объяснить тем, что дальность, существенно большая размеров Тихого океана, практически не нужна.

Корабль	D, 10^3 т	V_+	V_0	L, 10^3 миль	l, м	$10^{-3} L V_0^2 l^{-1}$	Год	Тип
Омаха (US)	7,0	34					1916	крс
Фурутака (J)	11,3	35,5						крс
Хирю (J)	20,2	34	18	10,3	27,3	122		авн
Эссекс (US)	26,0	33					1940	авн
Конго (J)	29,3	30	18	10,0	30,8	105	1932	крс
Дзуйкаку (J)	29,8	34	18	10,0	31,0	104	1937	авн
Акаги (J)	41,3	32,5	16	8,2	34,7	60	1923	авн
Лексингтон (US)	47,7	34	14	12,0	36,3	65	1922	авн
Ямато (J)	72,0	27	16	12,8	41,6	79	1939	лкр

Вернемся теперь к первой части задачи. Для этого нам понадобится гипотеза о том, как изменится мощность P, развиваемая двигателями корабля, при изменении линейных размеров. Разумно предположить, что $P \sim \lambda^3$. Поскольку мощность затрачивается на преодоление сил сопротивления, $P \sim FV \sim \rho l^2 V^3$. Таким образом, максимальная скорость корабля

$$V_+ \sim \lambda^{1/3} \qquad (02)$$

пропорциональна кубическому корню из линейных размеров корабля или корню девятой степени из водоизмещения, $V_+ \sim D^{1/9}$. Заметить столь слабую зависимость на фоне технических усовершенствований нереально. ■

Р10. Исследовать влияние фотонов солнечного света на движение небесных тел в Солнечной системе.

Очевидный эффект - световое давление. Величина радиальной компоненты силы светового давления на тело с характерным размером L, находящемся от Солнца на расстоянии R, может быть записана в виде

$$F_{rp} = \frac{I_S}{c}\left(\frac{R_T}{R}\right)^2 L^2, \qquad (1)$$

где $I_S = 1.4 \cdot 10^6$ эрг см$^{-2}$ с$^{-1}$ - солнечная постоянная (см. S04), а R_T - радиус орбиты Земли, $R_T = 1.5 \cdot 10^{13}$ см.

Условие "светового выдувания" тела имеет вид

$$\frac{I_S}{c}\left(\frac{R_T}{R}\right)^2 L^2 \geq \frac{GM_S m}{R^2} = \frac{GM_S \rho}{R^2} L^3. \qquad (2)$$

где $M_S = 2\cdot 10^{33}$ г - масса Солнца, а ρ - плотность тела. С уменьшением размеров сила тяготения убывает быстрее, чем сила светового давления, поэтому существует критический размер L_c такой, что все тела с $L \le L_c$ покинут Солнечную систему. Из (2) получаем (при $\rho = 1$)

$$L_c = \frac{I_S R_T^2}{cGM_S\rho} = 8\cdot 10^{-5}\ \text{см}. \tag{3}$$

Это - бессодержательный результат: оценка сечения поглощения/рассеяния σ геометрическими размерами тела $\sigma \sim L^2$ оправдана только в области применимости геометрической оптики, при $L >> \lambda$ (где λ - длина световой волны). А для солнечного света $\overline{\lambda} = 9\cdot 10^{-5}$ см. Впрочем, для звезд большой светимости оценка (3) может иметь смысл: так, для Денеба (α Лебедя, абсолютная звездная величина $\mathsf{M} = -5.2$) $L_c = 0.05$ см. □

Интереснее другое. Если v - скорость движения небесного тела по круговой орбите, то в системе отсчета, связанной с небесным телом как с телом отсчета, фотоны будут падать не перпендикулярно касательной к орбите, а слегка спереди - под углом $\theta \approx v/c$ (эффект астрономической аберрации). В итоге на тело будет действовать тормозящая сила

$$F_b = \frac{v}{c}F_{rp} = \frac{I_S}{c}\left(\frac{v}{c}\right)\left(\frac{R_T}{R}\right)^2 L^2. \tag{4}$$

Угол аберрации мал (для Земли $v/c \approx 10^{-4}$), но тормозящая сила действует постоянно - и не должна превосходить какого-либо порога. Из уравнения $m\dot{v} = F_b$ получается оценка для времени торможения:

$$\tau = \frac{\rho c^2}{I_S}\left(\frac{R}{R_T}\right)^2 L \tag{5}$$

На расстоянии от Солнца в 1 астрономическую единицу ($R = R_T$) получается

$$\tau = 2\cdot 10^7 \left(\frac{L}{1\text{см}}\right) \text{лет}. \tag{6}$$

За время порядка τ небесное тело (на круговой орбите) теряет свой угловой момент и падает на Солнце.

Таким образом, за время существования Солнечной системы $T_{SS} = 4.6\cdot 10^9$ лет внутренняя часть орбиты Земли будет очищена от всех тел меньше глыб с $L = 230$ см, внутренняя часть орбиты Сатурна - от всех тел меньше камушков с $L = 2$ см, внутренняя часть орбиты Плутона - от всех тел мельче песчинок с $L = 0.14$ см.

Явление торможения небесных тел солнечным светом называется *эффектом Пойнтинга - Робертсона*. ■

§1. Максимальная сила света (продолжение)

Все масштабы, построенные из фундаментальных констант, могут быть сведены к масштабам атомной системы и степеням безразмерных постоянных. Так, любой масштаб длины может быть записан в виде

$$L = a_0 \alpha^A \zeta^B \Omega^C. \tag{7}$$

Примеры: планковская длина $L_{Pl} = a_0 \alpha^{3/2} \Omega^{-1/2}$ (см. P01), "максимальный" радиус планеты $R_+ = a_0 \zeta \Omega^{1/2}$ (см. P09).

Не все комбинации вида (7) представляют ценность. Наиболее существенны те, которые что-то ограничивают или что-то разграничивают.

Наряду с боровским радиусом

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 5.29 \cdot 10^{-9} \text{ см} \tag{8}$$

важную роль играют масштабы $\alpha a_0 = \lambda\!\!\!^{-}_c$,

$$\lambda\!\!\!^{-}_c = \frac{\hbar}{mc} = 3.86 \cdot 10^{-11} \text{ см} \tag{9}$$

называемый *комптоновской длиной волны электрона*, и $\alpha^2 a_0 = r_c$,

$$r_c = \frac{e^2}{mc^2} = 2.82 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \tag{10}$$

называемый *классическим радиусом электрона*.

Физический смысл $\lambda\!\!\!^{-}_c$ таков: это - наименьший размер области пространства, в которой может быть локализован <u>один</u> электрон. Из $\Delta x = \lambda\!\!\!^{-}_c$ по соотношению неопределенностей следует неопределенность импульса $\Delta p = mc$ и характерная кинетическая энергия

$$E \sim \frac{(\Delta p)^2}{m} \sim mc^2 \tag{11}$$

порядка энергии покоя электрона. Чтобы локализовать электрон в более узкой области, придется сообщить ему энергию, достаточную для рождения электрон-позитронной пары.

Масштаб длины $\lambda\!\!\!^{-}_c$ связан с характерным масштабом напряженности поля $\mathcal{E}_S$ (и соответствующей ему интенсивности I_S), определяющим границу, за которой становится существенной нелинейность электромагнитного поля в вакууме. Если работа сил электрического поля при перемещении электрона на длину $\lambda\!\!\!^{-}_c$ станет равна энергии покоя электрона, $e\mathcal{E}_S \lambda\!\!\!^{-}_c \sim mc^2$, то создадутся условия, при которых станет возможно рождение электрон-позитронных пар.

$$\mathcal{E}_S = \frac{m^2c^3}{e\hbar} = \frac{1}{\alpha^3}\mathcal{E}_a = 4.4 \cdot 10^{13} \text{ Гс}. \qquad (12)$$

Эта величина называется *швингеровской напряженностью* поля. Соответствующий масштаб интенсивности

$$I_S = \frac{c}{8\pi}\mathcal{E}_S^2 = 2.3 \cdot 10^{29} \text{ Вт см}^{-2} \qquad (13)$$

на 12 порядков превосходит атомную интенсивность I_a.

Несколько утрируя, можно сказать, что при $I \sim I_a$ фотоны начинают интенсивно взаимодействовать между собой в присутствии атомов, а при $I \sim I_S$ начинают интенсивно взаимодействовать между собой и в пустом пространстве.

Следующий, еще меньший, масштаб длины $r_c = \alpha^2 a_0$ появляется в физике при рассмотрении задачи о рассеянии света на свободном электроне. Из уравнения движения электрона под действием электрического поля электромагнитной волны $m\ddot{x} = e\mathcal{E}\cos\omega t$ и выражения для мощности излучения ускоренно движущегося заряда $P \sim e^2\ddot{x}^2/c^3$ (см. S04) для мощности рассеянного излучения получается не зависящее от частоты выражение

$$P \sim \frac{e^4\mathcal{E}^2}{m^2c^3}. \qquad (14)$$

Отношение мощности излучения P к интенсивности падающего света I имеет размерность L^2 и называется *сечением рассеяния* σ. Для рассеяния на электроне

$$\sigma \sim \frac{e^4\mathcal{E}^2}{m^2c^3} \cdot \frac{1}{c\mathcal{E}^2} = \frac{e^4}{m^2c^4} = r_c^2 \sim 8 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2, \qquad (15)$$

что примерно на 8 порядков меньше сечения однофотонной ионизации = поперечника атома (см. S06). Отметим, что тот же порядок величины имеет сечение рассеяния нерезонансного (далекого от частот переходов между уровнями дискретного спектра) излучения на атоме.

Происхождение названия связано с тем, что в классической электродинамике несущее элементарный заряд e сферически симметричное заряженное тело радиуса r_c будет иметь массу, равную массе электрона, уже за счет одного только вклада энергии электростатического поля:

$$\Delta m \sim \frac{1}{c^2}\left(\frac{e}{r_c^2}\right)^2 r_c^3 \sim m. \qquad (16)$$

Величину r_c лучше рассматривать не как пространственный размер чего-либо, а как индикатор слабости нерезонансного взаимодействия света с веществом. В частности, соответствующий масштаб напряженности поля

$$\mathcal{E}_c = \frac{e}{r_c^2} = \frac{m^2 c^4}{e^3} = \frac{1}{\alpha^4}\mathcal{E}_a = 6.0 \cdot 10^{15}\ \text{Гс} \qquad (16)$$

заметной роли в физике не играет. ■

§2. Феноменология шаровой молнии

Шаровая молния (ball lightning, BL) - редкое явление, состоящее в появлении в воздухе светящейся области в форме шара, медленно движущейся и существующей достаточно продолжительное время. Термин "молния" связан с обстоятельствами наблюдений: шаровая молния часто (но не всегда) наблюдается во время грозы. Термин условен: о природе шаровой молнии существует ряд гипотез, вдаваться в которые мы не будем. Сложность проблемы BL вызвана редкостью и непродолжительностью явления, которые в основном исключают применение измерительной аппаратуры: почти все, что известно - это данные "бесприборных" наблюдений.

Ограничимся минимумом: считая BL ***телом*** (объектом, в состав которого входят все время одни и те же частицы), определим, основываясь на данных визуальных наблюдений, некоторые характеристики BL. Здесь же упомянем альтернативную гипотезу: П.Л. Капица в 1955 г. [1] предложил модель, в которой BL рассматривается как ***область пространства***, в которой свечение воздуха происходит за счет поступающей извне энергии радиоволн дециметрового диапазона.

В качестве характерных примем медианные значения параметров BL (в 50% наблюдений значения меньше, а в 50% - больше приведенных), основываясь на данных из работ [2,3].

1) BL имеет сферическую форму: диаметр $d \sim 15$ см.

2) BL светится - в цветах нагретого тела (красный, оранжевый, желтый, белый) - как лампочка мощностью $P \sim 100$ Вт.

3) BL плавает в воздухе: при этом горизонтальная компонента скорости $v_{=} \sim 100$ см с$^{-1}$, а вертикальная обычно меньше $v_{\perp} \sim 10$ см с$^{-1}$.

4) BL живет долго: $\tau \sim 15$ с.

Обратимся к выводам из этих данных.

A. Из п.п. 2) и 4) следует простейшая оценка энергии $E \sim P\tau \sim 1.5$ кДж.

B. Из значения вертикальной скорости $\upsilon_{\perp}$ (п. 3) можно получить ограничения на плотность вещества: равенство подъемной силы (архимедова минус сила тяжести) силе сопротивления ($F \sim \rho_0 \upsilon^2 R^2$, где ρ_0 - плотность воздуха, R - радиус) приводит к соотношению

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \sim \frac{3}{4\pi} \frac{\upsilon_{\perp}^2}{Rg} \sim 3 \cdot 10^{-3}. \qquad (17)$$

Таким образом, плотность вещества BL мало отличается от плотности воздуха: BL не может быть облаком нагретого газа.

C. Из п.п. 1) и 3) следует, что горизонтальная скорость $V_{=}$ еще недостаточно велика для возмущения формы BL (возбуждения волн на ее поверхности). Условие отсутствия такого возбуждения

$$V_{=} < \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{d\rho_0}} \qquad (18)$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения вещества BL. Для σ получаем оценку $\sigma \geq 30$ эрг см$^{-2}$ (примерно треть от поверхностного натяжения воды).

D. Из п.п. 1) следует, что нет архимедовой неустойчивости: давление от подъемной силы меньше, чем давление за счет поверхностного натяжения. Отсюда

$$R^3 g \Delta\rho \frac{1}{R^2} < \frac{\sigma}{R} \qquad (19)$$

где R - радиус BL. Используя найденное в **C** значение σ, получаем ограничение на отклонение плотности вещества BL от плотности воздуха:

$$\Delta\rho < \sigma R^{-2} g^{-1} \sim 5.4 \cdot 10^{-4} = 0.4\rho_0 \qquad (20)$$

Это ограничение слабее найденного выше (в **B**).

E. Вывод из **B** не позволяет считать, что излучение создается за счет кинетической энергии частиц вещества BL. Естественная альтернатива - считать, что излучение создается за счет изменения потенциальной энергии взаимодействия этих частиц. Взяв среднее расстояние между частицами (n - концентрация частиц)

$$a = \left(\frac{3}{4\pi n}\right)^{1/3} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ см}, \qquad (21)$$

используя полученную ранее оценку для коэффициента поверхностного натяжения (см. S03) $\sigma \sim E_0 a^{-2} Z^{-1}$ и найденное в **C** значение σ, получаем оценку энергии взаимодействия E_0 в расчете на частицу: $E_0 \sim \sigma a^2 Z \sim 8 \cdot 10^{-12}$ эрг.

Отсюда полный запас потенциальной энергии $E \sim VnE_0$, где V - объем BL; численно $E \sim 37$ кДж. Это значение не противоречит оценке **A**, так как разумно считать, что в излучение переходит лишь некоторая доля потенциальной энергии.

F. Закончим рассмотрением описанного наблюдателем конкретного случая: шаровая молния диаметром $d = 30$ см коснулась торчавшего из земли отрезка железной трубы и исчезла со взрывом. При этом сразу после взрыва труба оказалась согнута и скручена, покрыта ржавчиной - но теплового свечения видно не было.

Отсутствие свечения и появление окалины дают оценку температуры нагрева трубы: $\Delta T \sim 600$ К. Считая, что труба была сделана из железа, имела диаметр $d_p = 3$ см, толщину стенок $\delta_p = 0.3$ см и нагревалась на участке длины, равной диаметру, $L_p = 3$ см, определим количество теплоты:

$$Q \sim \pi d_p L_p \delta_p c \rho \Delta T \sim 17 \text{ кДж}. \qquad (22)$$

Механическая работа, совершенная при сгибании трубы, может быть оценена так:

$$A \sim \pi \sigma_T d_p L_p \delta_p \sim 0.5 \text{ кДж}, \qquad (23)$$

где $\sigma_T \sim 6 \cdot 10^8$ эрг см$^{-3}$ - предел текучести литого железа.

Значение Q неплохо согласуется с найденным в **E** запасом энергии BL, а соотношение $A/Q \sim 0.01$ представляется разумным: было бы странно, если бы в природном взрыве в механическую работу перешло больше внутренней энергии, чем это имеет место при взрыве заряда в орудии (кпд орудия $\eta \sim 3\%$ - см. данные, приведенные при решении задачи P04).

*

Урок из сказанного: даже для явлений непонятой природы и грубых наблюдательных данных бывает возможно определение количественных характеристик разными способами и проверка их на согласованность.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Капица П.Л. О природе шаровой молнии. с. 53 - 58. В кн.: Капица П.Л. Эксперимент, теория, практика. - М.: Наука, 1974 - 288 с.

[2] Charmen W.N. Ball lightning. Phys. Reports, 1979, vol. 54, no.,4, pp. 261-306.

[3] Стаханов И.П. О физической природе шаровой молнии. Научный мир, Москва, 1996. - 264 с.

☯