ЗАНЯТИЕ 3. 19.04.02

0. Разбор домашних задач.
1. Свет как газ фотонов.
2. Максимальная сила света.

§0. Разбор домашних задач

Рассмотрим некоторые задачи, предложенные на первом и втором занятиях.

P04. Если все размеры артиллерийского орудия увеличить в λ раз, то как изменятся его боевые характеристики?

Масса заряда $M_c \sim \lambda^3$. Масса снаряда $M_p \sim \lambda^3$. При взрыве заряда выделяется теплота, которое идет на нагревание образовавшегося газа. Считая, что преобразование теплоты в работу идет с постоянным к.п.д., получаем для скорости снаряда на выходе из ствола:

$$v_0 \sim \lambda^0. \qquad (1)$$

В качестве примеров возьмем орудия главного калибра линкоров первой половины XX века. В следующей таблице приведены: номер / имя корабля / год постройки орудий / калибр (в дюймах) / отношение длины ствола к калибру / отношение массы заряда (кг) к кубу калибра / отношение массы снаряда (кг) к кубу калибра / начальная скорость снаряда (м с$^{-1}$)

			C''	L/C	M_c/C^3	M_p/C^3	v_0
1	Viribus Unitis (AH)	1910	12	45	0.098	0.260	800
2	Royal Sovereign (GB) = Архангельск (SU)	1916	15	42	0.057	0.258	720
3	Yamato (J)	1939	18	45	0.056	0.239	790

Итак, и в действительности в основном подобные геометрически орудия сообщают снарядам одинаковые начальные скорости: в дальнейшем мы считаем $v_0 = 800$ м с$^{-1}$.

При стрельбе в вакууме результаты стрельб будут одинаковыми для любых калибров. При угле возвышения 45° снаряд (над плоской Землей) пролетит 64 км, поднявшись в высшей точке на высоту 16 км.

При стрельбе в воздухе надо учесть его сопротивление. Мы будем описывать величину силы сопротивления квадратичным законом

$$F_2 \sim \rho v^2 L^2 \qquad (2)$$

(см. P04). Коэффициент пропорциональности в (2) определим, *подогнав* параметры траектории к опытным данным. Уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\ddot{x} = -k\dot{x}\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}, \qquad \ddot{y} = -k\dot{y}\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} - g. \qquad (3)$$

Коэффициент k нельзя считать постоянным - высота подъема не мала в сравнении с *высотой атмосферы* H. Последнюю можно оценить из условия: потенциальная энергия молекулы в поле тяжести равна характерной тепловой энергии kT,

$$m_p AgH = kT, \qquad (4)$$

где A - масса "молекулы воздуха" в атомных единицах. В стандартных условиях

$$H = \frac{kT}{m_p Ag} = \frac{RT}{\mu g} = \frac{8.31 \cdot 10^7 \times 288}{28.8 \times 981} = 8.47 \text{ км}. \qquad (5)$$

Будем считать атмосферу изотермической; тогда зависимость плотности от высоты можно описать барометрической формулой

$$\rho(y) = \rho_0 e^{-\frac{y}{H}}. \qquad (6)$$

Модифицированные уравнения движения примут вид

$$\ddot{x} = -ke^{-\frac{y}{H}}\dot{x}\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}, \qquad \ddot{y} = -ke^{-\frac{y}{H}}\dot{y}\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} - g. \qquad (7)$$

Их легко решить численно. Хорошие данные есть по орудиям **Yamato** [1]. Подгоняя выбором k максимальную дальность стрельбы $L_+ = 42.0$ км (при угле возвышения $\theta = 45°$), получаем

$$k = 2.44 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}. \qquad (8)$$

При этом время полета снаряда получается $\tau = 98.7$ с при опытном значении $\tau = 98.6$ с.

При том же k проведем расчет для других углов θ и сравним расчет с опытом (опытные данные - в скобках).

θ	L, км	τ, с	v_f, м с$^{-1}$
30°	35.6 (35.8)	70.4 (70.3)	490 (475)
20°	27.7 (27.9)	49.3 (49.2)	485 (522)

Прекрасное согласие по дальности и времени полета, хорошее (10%) - по конечной скорости снаряда.

Теперь ясно, что с увеличением калибра коэффициент $k \sim \lambda^{-1}$ будет уменьшаться, а дальность стрельбы увеличится. Поскольку снаряд на максимальной дальности сохраняет около половины первоначальной энергии, оценку для дальность стрельбы можно взять в виде

$$L \sim \frac{1+\lambda}{2} \text{ или } \sqrt{\lambda}. \qquad (9)$$

Для $\lambda = 2/3$ ($C = 12''$) из этих оценок получаем

$$L_{+} = (0.816 \div 0.833) \times 42.0 = 34.3 \div 35.0 \text{ км}$$

Численное решение системы (7) дает $L_{+} = 35.1$ км=189.5 кб.

И наконец: сила сопротивления, действующая на снаряд после выстрела, создает ускорение $a = kv_0^2 = 15.6 \text{ м с}^{-2} = 1.6g$: сила сопротивления воздуха в полтора раза больше силы тяжести. ■

P08. Оценить максимальную высоту горы (на Земле).

Рассмотрим модель горы цилиндрической формы ("столовая гора") с площадью основания S и высотой h. Потенциальная энергия верхнего слоя горы толщиной Δx имеет потенциальную энергию

$$U = \rho S h \Delta x g \qquad (10)$$

(где ρ - плотность, g - ускорение свободного падения). Если эта энергия достаточна для того, чтобы расплавить слой такого же объема у подошвы горы - то расплав растечется, а гора осядет. Для плавления нужно сообщить энергию

$$E_m = Q_m \rho S \Delta x \qquad (11)$$

где Q_m - теплота плавления на единицу массы. Приравнивая (10) и (11), получаем

$$h_{+} = \frac{Q_m}{g} \qquad (12)$$

Для важнейшей горной породы - кварца - $Q_m = 1.35 \cdot 10^9$ эрг г$^{-1}$, откуда $h_{+} = 14$ км. Вулкан Мауна Лоа (Гавайи) имеет поперечник около 100 км и высоту над подножьем 9 км ($0.64h_{+}$). Гора Олимп на Марсе ($g = 376 \text{ см с}^{-2}$) имеет поперечник около 540 км и высоту над подножьем 27 км ($0.75h_{+}$).

Чему равно h_{+} для горы конической формы? ■

P09. Оценить максимальный размер планеты.

Гравитация стремится сжать планету, упругость этому препятствует. Рассмотрим стержень длиной L, сечением S, вертикально расположенный в поле тяжести с ускорением свободного падения g. Сжатие будет неограниченным, если сила тяжести, приложенная к слою толщиной Δx, будет достаточно велика, чтобы укоротить стержень на величину Δx. Сила тяжести $F_g = \rho S \Delta x g$, а противодействующая ей сила упругости $F_e = Y \frac{S}{L} \Delta x$ (где Y - модуль Юнга). Из баланса сил находим: $\rho g L = Y$. Для сферической планеты надо заменить L на радиус R (появятся еще несущественные числовые коэффициенты). Величина ускорения свободного падения (на поверхности планеты)

$$g = \frac{GM\rho}{R^2}, \tag{13}$$

где M - масса планеты. Выражая массу через плотность и радиус, получаем оценку максимального радиуса R_+ планеты, состоящего из вещества заданной плотности:

$$R_+ \sim \sqrt{\frac{Y}{\rho^2 G}}. \tag{14}$$

Для планеты типа Земли ($\rho = 5.5$, модуль Юнга - как для кварца, $Y = 8.2 \cdot 10^{11}$) получаем

$$R_+ = 6.375 \cdot 10^8 \text{ см}, \tag{15}$$

в то время как фактический экваториальный радиус Земли $R_\oplus = 6.378 \cdot 10^8$ см (Close shave!)

Вернемся теперь к фундаментальным масштабам. Без корректирующих коэффициентов

$$Y \sim \frac{E_a}{a_0^3} = \frac{e^2}{a_0^4}, \qquad \rho \sim \frac{m_p}{a_0^3} \tag{16}$$

Отсюда для максимального радиуса планеты получаем оценку

$$R_+ \sim a_0 \frac{m}{m_p} \sqrt{\frac{e^2}{m^2 G}} = a_0 \zeta \sqrt{\Omega} \tag{17}$$

Наибольшая планета больше атома водорода в $\zeta\sqrt{\Omega}$ раз.

Из оценки (14) следует также максимальное значение ускорения свободного падения на поверхности планеты:

$$g_+ \sim \sqrt{YG} \sim w_a \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \approx 45 \text{ м с}^{-2} \tag{18}$$

где $w_a = v_a \omega_a = 9.0 \cdot 10^{24}$ - атомный масштаб ускорения (ускорение, с которым движется электрон на круговой орбите основного состояния в атоме водорода). У поверхности Юпитера $g \approx 26$ м с$^{-2}$.

Выражая теплоту плавления Q_m (без корректирующих коэффициентов) через фундаментальные константы, $Q_m \sim \sqrt{\zeta / A^3} E_a m_p^{-1}$ (см. P07) и используя (18), получаем связь между максимальной высотой горы и максимальным радиусом планеты:

$$h_+ \sim \sqrt{\frac{\zeta}{A}} R_+ \sim \frac{1}{300} R_+ . \tag{19}$$

P09A. Если планета превосходит максимальный размер - чем закончится процесс гравитационного сжатия?

В условии баланса упругих и гравитационных сил $\rho g L = Y$ левая часть имеет размерность и смысл плотности гравитационной энергии W. Рассмотрим, как эти величины зависят от радиуса R планеты, составленной из вещества данной массы M.

$$W \sim \frac{GM\rho}{R}, \quad \rho \sim \frac{M}{R^3} \quad \Rightarrow \quad W \sim \frac{1}{R^4} \tag{20}$$

$$Y \sim \frac{e^2}{a} \cdot \frac{1}{a^3}, \quad a \sim R, \quad \Rightarrow \quad Y \sim \frac{1}{R^4} \tag{21}$$

Таким образом, процесс гравитационного сжатия <u>не может</u> быть остановлен.

Q5> Чем закончится процесс сжатия, если его нельзя остановить?

A5> Возникновением черной дыры.

Q5'> А что такое черная дыра?

A5'> Тело большой массы, у которого тяготение препятствует испусканию электромагнитных волн.

Дело не в большой массе: для сферического тела радиуса R и <u>любой</u> массы M может быть указано такое значение *гравитационного радиуса* R_g, что при $R < R_g$ излучение невозможно. Дадим оценку R_g по Лапласу: частица массы m улетит на бесконечность, если полная механическая энергия частицы неотрицательна:

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{R} \geq 0 . \tag{22}$$

Полагая $v = c$, находим пороговое значение:

$$R_g = 2\frac{GM}{c^2} \qquad (23)$$

Такое же значение (включая числовой коэффициент "2") получается из общей теории относительности. Для Земли $M_T = 6 \cdot 10^{27}$ г и $R_g = 0.9$ см; для Солнца $M_S = 2 \cdot 10^{33}$ г и $R_g = 3.0$ км. ■

Сделанный выше вывод о неограниченном гравитационном сжатии обязан своим происхождением неосмотрительной записи зависимости Y от расстояния между частицами - ***фактически неверной***. Для ее исправления воспользуемся *соотношением неопределенностей*: произведение неопределенностей в значениях импульса (Δp) и координаты (Δx) частицы должно превосходить постоянную Планка:

$$\Delta p \, \Delta x \ge \hbar. \qquad (24)$$

Пусть электрон находится в среднем на расстоянии r от протона. В этом случае его потенциальная энергия

$$U = -\frac{e^2}{r}. \qquad (25)$$

Локализация электрона приводит к появлению неопределенности в импульсе - и появлению средней кинетической энергии

$$T \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2mr^2}. \qquad (26)$$

Полная энергия $E(r) = T + U$ имеет минимум, который достигается при

$$r = \frac{\hbar^2}{me^2} = a_0. \qquad (27)$$

Из анализа (25) и (26) ясно, что для атомов, сильно сжатых по сравнению со "свободным" состоянием, основную роль играет возрастание кинетической энергии - откуда следует оценка

$$Y \sim \frac{\hbar^2}{ma^2} \cdot \frac{1}{a^3}, \qquad a \sim R, \qquad \Rightarrow \qquad Y \sim \frac{1}{R^5} \qquad (28)$$

Поскольку упругость растет при уменьшении R быстрее, чем плотность гравитационной энергии, при ***любом*** значении массы гравитационное сжатие будет остановлено. Остается гадать, почему параметры Земли так близко подходят к границе устойчивости планеты из "несжатого" вещества.

Из первой формулы (28) следует, что упругие свойства твердых тел могут быть объяснены наличием кинетической энергии ограниченных в пространстве электронов. ■

§1. Свет как газ фотонов

Электромагнитное излучение в вакууме можно рассматривать как газ фотонов - движущихся со скоростью света c частиц, состояние которых характеризуется импульсом

$$\vec{p} = \frac{\hbar\omega}{c}\vec{n}, \qquad (29)$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор в направлении распространения (строго говоря, для полного описания нужна еще одна переменная, задающая состояние поляризации фотона. Нам она не понадобится.) Энергия фотона $E = \hbar\omega = pc$.

Солнечный свет с интенсивностью $I_S = 1.4 \cdot 10^6$ эрг см$^{-2}$ с$^{-1}$ (см. S04) обладает средней частотой $\overline{\omega} = 2.0 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ и представляет собой газ фотонов с концентрацией

$$n = \frac{I}{c\hbar\overline{\omega}} = 2.2 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}, \qquad (30)$$

что примерно на 12 порядков меньше нормальной концентрации молекул воздуха.

Отражаясь от зеркала, перпендикулярного направлению света, каждый фотон передает ему импульс

$$\Delta p = 2\frac{\hbar\omega}{c}. \qquad (31)$$

В результате сила светового давления на единицу площади зеркала (*световое давление*) есть

$$p = nc2\frac{\hbar\overline{\omega}}{c} = 2\frac{I}{c\hbar\overline{\omega}}\hbar\overline{\omega} = 2\frac{I}{c} \qquad (32)$$

Эта величина не содержит $\hbar$ - является классической (и была вычислена Максвеллом задолго до создания квантовой теории). Значение давления солнечного света

$$p = 9.3 \cdot 10^{-5} \text{ эрг см}^{-3} = 9.3 \cdot 10^{-6} \text{ Па}, \qquad (33)$$

что примерно на 10 порядков меньше нормального атмосферного давления.

S06. Оценить скорость фотоионизации атомов.

Для того, чтобы ионизация произошла, необходимо, чтобы энергия фотона превосходила энергию связи электрона в атоме, $\hbar\omega > E_0$. Скорость отрыва электронов должна быть пропорциональна скорости попадания фотонов в атом:

$$\dot{W}_1 \sim nca_0^2 \sim \frac{I}{\hbar\omega} a_0^2 \qquad (34)$$

Для света с интенсивностью $I_S = 1.4 \cdot 10^6$ эрг см$^{-2}$ с$^{-1}$ и энергией кванта $\hbar\omega = 5$ *эВ* (см. Занятие 1, §3) получаем $\dot{W} \sim 5$ с$^{-1}$: атом потеряет электрон в среднем через 0.2 с$^{-1}$.

Заметим: могло бы оказаться, что ионизация при попадании фотона в атом происходит с некоторой вероятностью $P << 1$: однако именно оценка (34) подтверждается точным расчетом, если только энергия фотона не слишком велика, $\hbar\omega \sim E_0$.

Если энергии одного фотона для ионизации недостаточно, $E_0 > \hbar\omega$, то ионизация может произойти при одновременном поглощении нескольких фотонов. Ограничимся случаем двухфотонной ионизации, которая доминирует, если $2\hbar\omega > E_0 > \hbar\omega$. Для одновременного поглощения двух фотонов необходимо, чтобы при попадании одного фотона другой уже находился бы в атоме: вероятность последнего события $P = na_0^3$. Таким образом,

$$\dot{W}_2 \sim \dot{W}_1 \left(\frac{Ia_0^3}{c\hbar\omega} \right). \qquad (35)$$

Скорость двухфотонной ионизации в под действием (подходящего по частоте) излучения с интенсивностью солнечного света оказывается ничтожно малой - фактор в скобках равен $1.7 \cdot 10^{-18}$.

Этот фактор можно рассматривать как отношение интенсивности света I к масштабу интенсивности

$$I_a = \frac{c\hbar\omega}{a_0^3} = 8 \cdot 10^{16} \text{ Вт см}^{-2}. \qquad (36)$$

Это - один из важнейших масштабов (иногда называемый *атомной интенсивностью*): он определяет границу, за которой свойства атома, взаимодействующего со светом, сильно меняются. Этот вопрос можно отнести к содержанию

§3. Максимальная сила света,

перетолковав название параграфа. Дело в том, что интенсивность света I зависит от выбора (инерциальной) системы отсчета. Перейдя (из лабораторной) в систему отсчета, движущуюся навстречу свету со скоростью $v \to c$, можно сделать I неограниченно большой. Поэтому вопрос о "максимальной силе света" лучше трактовать как вопрос о больших масштабах интенсивности света, определяющих границы, на которых свойства вещества - или самого света - качественно изменяются. Один из них - I_a, о другом будет сказано позже.

Домашняя задача:

P10. Исследовать влияние фотонов солнечного света на движение небесных тел в Солнечной системе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Печуконис Н.И. Линейный корабль "Ямато". С-Пб, б/изд., 1994. - 52 с.

☯