ЗАНЯТИЕ 2. 12.04.02

0. Разбор домашних задач.
1. Звездная величина атома.

§0. Разбор домашних задач

Рассмотрим некоторые задачи, предложенные на первом занятии.

P01. Планковская система единиц.

Основными масштабами являются $\hbar, c$ и G. Их размерности:

$$[\hbar] = \frac{\mathrm{ML}^2}{\mathrm{T}}, \qquad [c] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}, \qquad [G] = \frac{\mathrm{L}^3}{\mathrm{MT}^2} \tag{1}$$

Масштабы основных величин - массы, длины и времени - имеют следующие формы и значения:

$$[M] = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.17 \cdot 10^{-5} \text{ г}, \tag{2}$$

$$[L] = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.61 \cdot 10^{-33} \text{ см}, \tag{3}$$

$$[T] = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.36 \cdot 10^{-44} \text{ с}. \tag{4}$$

Планковские масштабы устанавливают границу области, в которой становится существенным учет гравитационного взаимодействия элементарных частиц.

P02. Как изменятся летные характеристики самолета, если все его линейные размеры увеличить в λ раз?

Если тело с характерным размером L движется со скоростью v в неподвижной жидкости с плотностью ρ ($[\rho] = \mathrm{ML}^{-3}$) и вязкостью η ($[\eta] = \mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$), то величину силы сопротивления F можно представить в двух формах:

1) как зависящую от вязкости (и пропорциональную ей), но не зависящую от плотности:

$$F_1 \sim \eta v L; \tag{5}$$

2) как зависящую от плотности (и пропорциональную ей), но не зависящую от вязкости:

$$F_2 \sim \rho v^2 L^2. \qquad (6)$$

Безразмерное отношение этих величин есть обратное число Рейнольдса:

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\rho v L} = \frac{1}{\mathrm{Re}}. \qquad (7)$$

Используя параметры самолета Линдберга ($L \sim 10^3$ см, $v \sim 5 \cdot 10^3$ см с$^{-1}$) и воздуха ($\rho = 1.2 \cdot 10^{-3}$ г см$^{-3}$, $\eta = 1.8 \cdot 10^{-4}$ г см$^{-1}$с$^{-1}$) получаем для числа Рейнольдса значение $\mathrm{Re} \sim 3 \cdot 10^7$. В этой области движение воздуха турбулентно, и вязкость не влияет на силу сопротивления, для определения которой будем пользоваться выражением (6).

Q4< Задача не может быть решена: с увеличением размеров винта скорость концов его лопастей превзойдет скорость звука, что приведет к возникновению скачков плотности и качественному изменению характера обтекания.

A4< Во-первых, до этого еще далеко: самолет Линдберга тихоходный. Во-вторых, переход пропеллером звукового барьера не сказывается катастрофически на его эффективности - хотя в свое время такое поверье было распространено. Так, у последних предвоенных рекордных самолетов скорости концов лопастей достигали значений числа Маха $\mathrm{Ma} = 0.98 - 1.02$. "Опасение, что к.п.д. винтов по мере приближения окружной скорости к скорости звука у земли будет резко падать, как показывают фактически реализованные скорости при заданных мощностях, не оправдалось" [1]. Думаю, что у турбовинтового Ту-95 (максимальная скорость 950 км/час) значение Ma еще больше, а проблем нет.

При увеличении размеров масса самолета $M \sim \lambda^3$; пропорциональная массе сила тяжести $P \sim \lambda^3$. В горизонтальном полете сила тяжести должна уравновешиваться подъемной силой F_l, которая представляет часть (вертикальную компоненту) силы сопротивления воздуха, $F_l \sim v^2 L^2 \sim v^2 \lambda^2$. Следовательно, для горизонтального полета самолета (той же геометрии) из условия равновесия $v^2 \lambda^2 \sim \lambda^3$ следует, что его скорость должна возрасти, $v \sim \sqrt{\lambda}$.

Мощность горизонтальной компоненты силы сопротивления $W = F_l v \sim v^3 L^2 \sim \lambda^{3\frac{1}{2}}$. Запас топлива на самолете (а ему пропорциональна работа, которую может совершить двигатель) $Q \sim \lambda^3$. Максимальное время полета $\tau \sim Q/W \sim \lambda^{-1/2}$, а дальность полета $S \sim v\tau \sim \lambda^0$ от λ НЕ ЗАВИСИТ.

Впрочем, задача еще далеко не закончена.

P02A. В условиях задачи Р02 рассмотреть работу воздушного винта.

P05. Оценить максимальную частоту ω_+ колебаний атомов в кристаллической решетке твердого тела.

Рассмотрим атом как прикрепленный к своему положению в решетке пружиной. Жесткость пружины k имеет размерность $[k] = \mathrm{MT}^{-2} = \mathrm{EL}^{-2}$. Величина такой размерности, составленная из масштабов конденсированного тела;

$$k_m = E_m a_m^{-2} = 1.28 \cdot 10^4 \text{ г с}^{-2}. \tag{8}$$

Отсюда, учитывая значение массы атома "типичного металла" $M = 48.6 m_p = 8.11 \cdot 10^{-23}$ г, получаем частоту колебаний

$$\omega_0 \sim \sqrt{\frac{k}{M}} = 1.26 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}. \tag{9}$$

В качестве нулевого приближения это неплохо. Улучшить результат можно, предположив, что пружины связывают соседние атомы между собой и рассмотреть звуковые волны: максимальной частоте звуковых волн соответствует длина волны в два межатомных расстояния (соседние атомы колеблются в противофазе). Тогда

$$\omega_+ \approx \pi\omega_0 = 3.96 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}. \tag{10}$$

Величина ω_+ известна в теории твердого тела под названием *дебаевской частоты*, $\omega_+ = \omega_D$. Она определяет также масштаб температуры - *дебаевскую температуру* T_D, $\hbar\omega_D = kT_D$.

Сравним с экспериментом.

	Me	Al	Fe	Cu	$\bar{\delta}$
Дебаевская температура T_D, K	302	394	420	315	0.09∅

P06. Оценить температуру плавления металлов T_m.

Естественно связать температуру, характеризующую изменение характера пространственного движения атомов при неизменной плотности вещества, с дебаевским масштабом температуры: $T_m = T_D$.

Сравним с экспериментом.

	Me	Al	Fe	Cu	$\bar{\delta}$
Температура плавления T_m, K	302	933	1808	1356	0.64∅

P07. Оценить теплоту плавления металлов Q_m.

Естественно связать величину энергии, характеризующую изменение характера пространственного движения атомов при неизменной плотности вещества, с дебаевским масштабом энергии:

$$Q_m = kT_D N_A = \hbar\omega_D N_A \tag{11}$$

Сравним с экспериментом.

	Me	Al	Fe	Cu	$\bar{\delta}$
Теплота плавления Q_m, кДж моль$^{-1}$	2.51	10.7	15.5	13.0	0.71Ø

Как видно, согласие в последних двух случаях не очень хорошее. Но путь правилен: в физике твердого тела температура плавления определяется *критерием Линдемана* [2], основанным на предположении, что при T_m среднеквадратичное смещение атома из положения равновесия составляет фиксированную малую долю постоянной решетки. Далее, отношение $Q_m / kT_m N_A$ для реальных металлов почти постоянно и близко к единице. ■

§1. Звездная величина атома

Общему признанию атомной гипотезы, пришедшему в начале XX века (гимназический "Курс физики" К.Д. Краевича - 4-е изд., 1913 - констатировал, что атомная гипотеза стала "почти достоверностью") предшествовал период борьбы с ней, которую вели выдающиеся физики. В их числе - Эрнст Мах, который на фразу, содержащую слово "атом", реагировал вопросом:

— Видели Вы хоть один?

Атом мал; излучающий атом будет казаться глазу звездой. Вот наша задача.

S04. Какой величины звездой будет казаться человеку одиночный излучающий атом, видимый с расстояния $L = 10$ см?

Электромагнитное излучение - это направленный вовне поток энергии электромагнитного поля, создаваемый ускоренно движущимся зарядом. Излучаемая мощность P должна быть пропорциональна четной степени заряда e (выбор знака заряда - условность) и четной степени ускорения $\ddot{x}$ (от инверсии осей координат ничего не должно измениться). Простейшие четные степени - квадраты: необходимую размерность можно получить, использовав единственную константу электродинамики - скорость света c. В итоге получаем оценку

$$P \sim \frac{e^2 \ddot{x}^2}{c^3}. \qquad (12)$$

Рассмотрим излучающий атом: $\ddot{x} \sim a_0 \omega^2$, где ω - частота излучения. Положим $\omega = 3.4 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$, что соответствует зеленому свету - максимальной чувствительности стандартного человеческого глаза. Тогда мощность электромагнитного излучения атома

$$P \sim \frac{e^2 a_0^2}{c^3} \omega^4 = 3.2 \cdot 10^{-5} \text{ эрг с}^{-1}. \qquad (13)$$

Это значение является физически выделенным. Во-первых, оно определяет среднюю мощность спонтанного излучения изначально возбужденного атома. Во-вторых, формула (13) описывает мощность излучения атома, находящегося под действием резонансного - совпадающего с частотой ω перехода между основным и каким-нибудь возбужденным состояниями дискретного спектра света с интенсивностью от $I_- \sim 6 \cdot 10^{-5}$ Вт см$^{-2}$ до $I_+ \sim 6 \cdot 10^{13}$ Вт см$^{-2}$.

В наших условиях интенсивность излучения атома

$$I_a = \frac{P}{4\pi L^2} = 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ эрг см}^{-2} \text{ с}^{-1}. \qquad (14)$$

Интенсивность излучения Солнца (в вакууме, на расстоянии, равном среднему радиусу орбиты Земли - эта величина называется *солнечной постоянной*) примерно на 14 порядков больше:

$$I_S = 1.4 \cdot 10^6 \text{ эрг см}^{-2} \text{ с}^{-1} \qquad (15)$$

Абсолютной звездной величиной называется звездная величина, видимая со стандартного расстояния 10 парсек = $3.1 \cdot 10^{19}$ см, что превосходит радиус орбиты Земли в $2.0 \cdot 10^6$ раз. Будучи отодвинуто на стандартное расстояние, Солнце будет создавать у Земли излучение с интенсивностью ($I \sim R^{-2}$)

$$I'_S = 3.5 \cdot 10^{-7} \text{ эрг см}^{-2} \text{ с}^{-1}, \qquad (16)$$

сравнимое с I_a. Видность атома улучшается за счет того, что далеко не все излучение Солнца попадает в область чувствительности глаза - а атом излучает на частоте максимальной чувствительности. Выигрыш за счет этой "спектральной компрессии" дает фактор ≈ 7.3. Учитывая, что абсолютная величина Солнца $\mathsf{M}_S = 4.8$, для видимой звездной величины атома получаем $\mathsf{M}_a = 5.5$. Принято считать, что невооруженному глазу видны звезды до шестой величины.

Таким образом, одиночный атом, рассеивающий резонансное (зеленое) излучение, с расстояния $L = 10$ см будет казаться ***слабенькой, но еще видимой звездой***. ■

Излучение нагретых тел удобно описывать моделью абсолютно черного тела, для которого поток энергии с единицы поверхности зависит только от температуры.

S05. Найти зависимость мощности J, излучаемой с единицы поверхности абсолютно черного тела, от его температуры T.

В формулы для мощности температура должна входить в форме энергетической температуры $\Theta = kT$ (k - постоянная Больцмана). Абсолютно черное тело - предельная модель, не зависящая от каких-либо констант, описывающих вещество. Поэтому в формулу для J могут войти только универсальные константы $\hbar$ и c. Из трех названных величин однозначно получается

$$J \sim \frac{\Theta^4}{\hbar^3 c^2}. \tag{17}$$

Закон излучения черного тела называется *законом Стефана - Больцмана* и записывается в виде

$$J = \sigma T^4, \tag{18}$$

где *постоянная Стефана - Больцмана*

$$\sigma = \frac{\pi^2}{60}\frac{k^4}{\hbar^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-5}\ \text{эрг}\,\text{см}^{-2}\,\text{с}^{-1}\,\text{град}^{-4}. \tag{19}$$

Интересен вклад Стефана в установление этого закона [3]: прочитав об эксперименте Тиндаля, в котором для отношения "полных излучений" платиновой проволоки при температурах $T_2 = 1473$ K и $T_1 = 798$ K было получено значение 11.7, Стефан заметил, что $11.7 \approx (1473/798)^4$ и заключил, что плотность потока излучения ВСЕГДА пропорциональна четвертой степени температуры. От стандартной процедуры установления эмпирических законов здесь три отличия.

1) Стефан использовал ***чужие*** экспериментальные данные.

2) Был использован ***абсолютный минимум*** экспериментальных точек - ***две***. Обычно используются десятки точек: так, закон Бойля - Мариотта (1662) был установлен на основе 44 точек, для установления закона Кулона (1785) точек было использовано девять, а для закона Ома для замкнутой цепи (1826) - 40.

3) Экспериментальные данные были ***ошибочны***: точные современные измерения дают для отношения Тиндаля значение 18.6 (платина в этом диапазоне температур плохо аппроксимируется черным телом) - а закон получился правильный.

Раз у нас под руками солнечная постоянная и закон Стефана - Больцмана:

S05A. "Белое солнце пустыни": вычислить максимальную температуру, до которой может нагреться тело на солнцепеке.

Из условия баланса солнечной постоянной и излучаемой мощности $I_S = J$ получается

$$T_+ = \left(\frac{I_S}{\sigma}\right)^{1/4} = 395\ \text{К} = 122^\circ C. \qquad (20)$$

Если на солнце выставить тонкую черную пластинку (поглощает одна сторона, излучают обе), то она не нагреется выше температуры $T'_+ = T_+(2)^{-1/4} = 333\ \text{К} = 60^\circ C$.

Домашние задачи:

P08. Оценить максимальную высоту горы (на Земле).

P09. Оценить максимальный размер планеты.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Макаров С.Я. Развитие гоночных самолетов. Техника Воздушного Флота, № 8-9 (1946) - с. 1 - 21.
[2] Займан Дж. Принципы теории твердого тела. - М.: Мир, 1974. - 472 с. - с. 83.
[3] Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики. - М.: Наука, 1985. - 334 с. - с. 18.

☯