ЗАНЯТИЕ 1. 05.04.02

Фундаментальные константы, масштабы и размерные оценки.

0. История: системы единиц, масштабы и размерные оценки.
1. Атомные масштабы.
2. Твердое тело как атомная система.

§0. Предисловие

Теоретическая физика есть искусство получения значений физических величин без помощи математики.

Вместо математики (точнее, вместе с ней) используется некий плохо формализованный тип исчисления - "грубая алгебра" - основанный на использовании соотношений

<<	~	>>
много меньше	по порядку величины равно	много больше

Порядком величины в математике называется целая часть десятичного логарифма величины. Знак "~" чаще всего означает, что связанные им величины различаются не более чем в 10 раз. Смысл знаков "<<" и ">>" тоже размыт. Методом экспертной оценки установлено, что половина физиков - теоретиков согласна с соотношением "1/5<<1", а две трети согласны с соотношением "1/10<<1". Таким образом, грубая алгебра предназначена для получения грубо приближенных значений - ***оценок*** величин.

С применением грубой алгебры связаны понятия фундаментальных констант и характерных масштабов. Эти понятия образовались в ходе процесса унификации физики и выработки универсальной системы единиц измерения - процесса, который занял весь XIX век, который в истории считается начавшимся в 1789 году, а закончившимся в 1914 году.

В начале этого периода физика представляла *набор* теорий (механику системы точек, механику сплошных сред, учения о теплоте, электричестве, магнетизме, оптику и пр.), слабо связанных и обладавших собственными системами единиц измерения.

В его конце физика представляла *систему* теорий, взаимосогласованным образом описывавшую простейшие природные явления и использовавшую единую и окончательно установленную систему единиц.

§1. Система единиц, безразмерные комбинации, масштабы

В становлении системы единиц и связанной с ним эволюции учения о размерности можно отметить пять вех.

1) Создание используемой доныне метрической системы единиц - в апреле 1790 г. Учредительное Собрание Франции высказалось за необходимость создания единой и рациональной системы мер и поручило Французской Академии наук ее разработку.

В рамках фиксированной системы единиц сложилось представление о размерности: если $A, B, C\ldots$ - основные единицы физических величин, то значение любой физической величины Z зависит от конечного числа единиц измерения, и при том известным - степенным - образом:

$$[Z] = A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \ldots \qquad (1)$$

Выражение в правой части называется ***размерностью*** величины Z.

С понятием размерности связано понятие ***масштаба***. Дадим предварительное определение: масштабом физической величины Z в данной физической задаче является имеющая размерность $[Z]$ физическая величина, построенная из параметров задачи и ее начальных условий.

Это определение устанавливает необходимые условия. Достаточные условия трудно формализуются: важные - так называемые *характерные масштабы* - описывают *внутренние* границы, при переходе через которые вид зависимостей физических величин существенно меняется, или *внешние* границы теории в области параметров.

2) Универсализация системы единиц, первым примером которой стало создание основанной на трех метрических масштабах M, L и T системы единиц для магнитных измерений (К.Ф. Гаусс, 1832).

В дальнейшем интересы физики и техники разошлись. Теоретическая физика предпочитает основанную на трех масштабах систему единиц СГС (в частности, она используется в курсе теоретической физики Ландау и Лифшица). Потребности техники определили широкое распространение основанной на большем числе масштабов (на семи) Международной Системы (SI).

3) Развитие представлений о роли безразмерных комбинаций физических величин и основанных на них критериях подобия.

Безразмерной называется физическая величина, значение которой не зависит от выбора единиц измерения. В формуле размерности для безразмерной величины все показатели степеней α, β, γ равны нулю.

Главным источником интереса к безразмерным величинам стали задачи гидродинамики сложных систем. Для них были установлены сходства свойств течений жидкостей при фиксированных величинах некоторых безразмерных параметров (что позволило использовать для экспериментального исследования масштабно подобные модели). Первыми примерами таких безразмерных комбинаций были числа Фруда, Рейнольдса и Маха.

Число Фруда (1870)

$$\mathrm{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \tag{2}$$

(где v - скорость потока жидкости, g - ускорение свободного радения, L - глубина потока) есть отношение скорости потока к скорости распространения волн на поверхности "мелкой воды".

Число Рейнольдса (1883)

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v L}{\eta} \tag{3}$$

(где ρ - плотность жидкости, v - скорость потока, L - характерный размер тела, η - вязкость жидкости) определяет характер обтекания тела: при малых значениях Re течение ламинарно, а при больших Re - турбулентно.

Число Маха (1887)

$$\mathrm{Ma} = \frac{v}{v_s} \tag{4}$$

равно отношению скорости потока жидкости к скорости распространения звука в жидкости.

4) Установление списка фундаментальных констант.

Фундаментальная константа есть физическая величина, значение которой не может быть изменено.

Самой старой фундаментальной константой является гравитационная постоянная G, значение которой было *угадано* И. Ньютоном (1687) и измерено Н. Маскелайном (1776) и Г. Кавендишем (1798).

Фундаментальная роль скорости света в вакууме c как константы электродинамики была отмечена Г.Р. Кирхгофом (1857). Ее универсальная роль стала ясна после работ Эйнштейна (1905).

Открытие электрона (Дж. Дж. Томсон, 1897) дало еще два параметра - элементарный электрический заряд e и массу электрона m.

Масса протона m_p (точнее, близкая к ней атомная единица массы) была известна в физике задолго до открытия протона как элементарной частицы: $m_p \approx 1\, а.е.м = N_A^{-1}$ г. Надежные (с точностью лучше 10%) значения числа Авогадро N_A были получены к 1900 г.

Наконец, открытие квантования значений энергии осциллятора электромагнитного поля (М. Планк, 1900) дало еще одну фундаментальную константу - постоянную Планка $\hbar$.

Табл. 1 Фундаментальные константы

название	*обозн.*	*знач. в ед. СГС*
Скорость света	c	$3.00 \cdot 10^{10}$
Постоянная Планка	$\hbar$	$1.05 \cdot 10^{-27}$
Масса электрона	m	$9.11 \cdot 10^{-28}$
Масса протона	m_p	$1.67 \cdot 10^{-24}$
Элементарный заряд	e	$4.80 \cdot 10^{-10}$
Гравитационная постоянная	G	$6.67 \cdot 10^{-8}$

В таблице шесть величин - а основных единиц (в системе СГС) только три. Поэтому из фундаментальных констант можно образовать не менее трех безразмерных комбинаций. Главными являются следующие:

Табл. 2 Безразмерные комбинации

название	*выражение*	*обозначение*	*значение*
Постоянная тонкой структуры	$\frac{e^2}{\hbar c}$	α	$7.36 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{137}$
Отношение масс	$\frac{m}{m_p}$	ζ	$5.44 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{1836}$
Большая постоянная	$\frac{e^2}{m^2 G}$	Ω	$4.16 \cdot 10^{42}$

Название *постоянной тонкой структуры* и обозначение "α" общеприняты. Ее малость служит основой важнейших теоретических методов в квантовой электродинамике. Название "*отношение масс*" почти общепонятно, но устойчивого обозначения у него нет. Малость ζ является основой важного метода рассмотрения квантовых свойств систем из ядер и электронов - молекул и конденсированных веществ (твердых тел) - метода Борна - Оппенгеймера. Наконец, "большая постоянная" встречается в физике так редко, что ее смысл приходится каждый раз объяснять заново: Ω - это отношение величины силы электростатического отталкивания двух электронов к величине силы их же гравитационного притяжения.

Почти наравне с фундаментальными константами выступают коэффициенты перевода эмпирической шкал "количества вещества" в число штук частиц - число Авогадро N_A и коэффициент перевода термодинамической температуры в энергетическую шкалу - постоянная Больцмана.

Табл. 3 Переводные коэффициенты

название	*обозначение*	*значение*
Число Авогадро	N_A	$6.02 \cdot 10^{23}$
Постоянная Больцмана	k_B	$1.38 \cdot 10^{-16}$ эрг К^{-1}

5) Завершение учения о размерностях: в 1914 г. Э. Бекингем доказал, что любое равенство физической теории может быть выражено как алгебраическое соотношение между безразмерными величинами:

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, .. \varepsilon_N) = 0. \qquad (5)$$

В литературе это положение называется "пи-теоремой", от обычая (не совсем забытого) обозначать безразмерные комбинации заглавными буквами "пи" с индексами, Π_i

§2. Атомные масштабы

Из фундаментальных констант могут быть построены системы основных масштабов - массы, длины и времени - и установлены различные естественные системы единиц.

P01. Планковская система единиц. Макс Планк в 1899 году (sic! : см. [1]) предложил использовать в качестве "натуральной системы единиц" систему, опирающуюся на масштабы $c, \hbar$ и G. Определить масштабы массы, длины и времени этой системы (сейчас они называются *планковскими масштабами*).

Q01> Константа G есть характеристика весьма слабого (см. "большую константу" в таблице 1) гравитационного взаимодействия. Было бы естественно заменить ее на характеристику электромагнитного взаимодействия - элементарный заряд e. Однако такая "электро-планковская" система единиц НИКОГДА не применялась. Почему?

A01> Такая система не существует: размерности величин $c, \hbar$ и e ЗАВИСИМЫ - что следует из существования безразмерной постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$ (см. Табл. 1)

Важнейшей из естественных шкал является атомная. В доказательство сошлемся на авторитет Ричарда Фейнмана, который писал:

"Если бы в результате мировой катастрофы все накопленные научные знания оказались бы уничтоженными и к грядущим поколениям живых существ перешла бы только одна фраза, то какое утверждение, составленное из наименьшего количества слов, принесло бы наибольшую информацию? Я считаю, что это - *атомная гипотеза* (можете называть ее не гипотезой, а фактом, но это ничего не меняет: *все тела состоят из атомов - маленьких телец, которые находятся на небольшом расстоянии, но отталкиваются, если одно из них прижать к другому.* " [2]

Система масштабов, определяющая характерные размеры атомов, наделяет Вселенную естественной шкалой размеров и переводит гипотезы о возможности самоподобного повторения устройства мироздания с произвольно малыми пространственными размерами в область научной фантастики.

Впрочем, задачи о поведении параметров сложных систем при изменении их пространственных размеров представляют интерес для техники.

P02. В 1927 году американский летчик Чарльз Линдберг на самолете Ryan NYP "Spirit of St. Louis" перелетел без посадки через Атлантический океан (из Нью-Йорка в Париж), установив новый рекорд дальности - 5809 км. Очередной задачей авиации стал беспосадочный полет через Тихий океан.

Японская фирма Kawanishi спроектировала и построила самолет Ki-12 для такого перелета, основываясь на следующем рассуждении: поскольку предстояло пролететь в полтора раза большее расстояние - все размеры самолета Линдберга были увеличены в полтора раза [3].

Если все размеры самолета увеличить в λ раз, то как изменятся его летные характеристики?

P03. Если все размеры корабля увеличить в λ раз, то как изменятся его ходовые характеристики?

P04. Если все размеры артиллерийского орудия увеличить в λ раз, то как изменятся его боевые характеристики?

Q02< Обычно мы рассматриваем движение материальной точки, и когда в задаче говорится "самолет", то имеется в виду материальная точка. Что в таком случае означает увеличение размеров?

A02< Представим себе конкретный самолет Линдберга: одномоторный поршневой самолет. Сохраняя материал каждой детали неизменным, увеличим размеры всех деталей в λ

раз - от размаха крыльев до диаметра шурупов и толщины обшивки. Кстати, это и означает, что модель материальной точки в данном случае неприменима.

Q02'< Но тогда надо знать, как изменится КПД двигателя, и как изменится сопротивление вязкого воздуха.

A02'< В определении этих зависимостей, собственно, и состоит задача. Конечно, она сложна - но можно попробовать ее решить.

Вернемся к атомной системе единиц. Она определяется масштабами e, m и $\hbar$: в строении атомов определяющую роль играет кулоновское взаимодействие электронов с ядром и между собой (отсюда e). Для многих задач масса атомного ядра несущественна (ядро можно считать бесконечно массивным) - а вот масса электрона m существенна всегда. Наконец, атом - квантовый объект (плохо описывается классическими моделями): его характеристики зависят от фундаментального масштаба квантовой теории - постоянной Планка $\hbar$.

Табл. 5 Атомные масштабы

ОСНОВНЫЕ			*размерн.*	*знач. в ед. СГС*
Масса электрона	m		M	$9.11\cdot10^{-28}$
Элементарный заряд	e		$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$	$4.80\cdot10^{-10}$
Постоянная Планка	$\hbar$		ML^2T^{-1}	$1.05\cdot10^{-27}$
ВТОРИЧНЫЕ		*выражение через основные*		
Атомная скорость	v_a	$\frac{e^2}{\hbar}=\alpha c$	$L\,T^{-1}$	$2.19\cdot10^{8}$
Атомная единица энергии	E_a	$mv_a^2=\frac{me^4}{\hbar^2}$	ML^2T^{-2}	$4.37\cdot10^{-11}$ {27.2 эВ}
Боровский радиус	a_0	$\frac{e^2}{E_a}=\frac{\hbar^2}{me^2}$	L	$5.29\cdot10^{-9}$
Атомная частота	ω_a	$\frac{E_a}{\hbar}=\frac{me^4}{\hbar^3}=\frac{v_a}{a_0}$	T^{-1}	$4.13\cdot10^{16}$
Атомное время	t_a	$\omega_a^{-1}=\frac{\hbar^3}{me^4}$	T	$2.42\cdot10^{-17}$
Атомная напряженность поля	$\mathcal{E}_a$	$\frac{e}{a_0^2}=\frac{m^2e^5}{\hbar^4}$	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$ {= гаусс}	$1.72\cdot10^{7}$

§3. Твердое тело как атомная система

Атомные масштабы непосредственно определяют многие свойства конденсированных веществ (твердых тел).

Для того, чтобы получить более приятные и убедительные оценки, стоит отойти от буквального использования атомных масштабов и взять близкие к ним "твердотельные масштабы".

В дальнейших примерах мы будем обращаться для сравнения к бытовым металлам - алюминию (Al), железу (Fe) и меди (Cu) - введя наряду с ними условный "типичный металл" (Me), характеристики которого определятся средними от первых трех.

В качестве масштаба длины используем величину a_m - типичное расстояние между атомами: длину стороны куба с объемом, приходящимся на один атом.

	Al	Fe	Cu	Me
Атомная масса A	27.0	55.8	63.5	48.6
Плотность ρ, г см$^{-3}$	2.70	7.86	8.96	6.50
Межатомное расстояние a, 10^{-8} см	2.55	2.28	2.37	$2.37 = a_m$

В качестве масштаба энергии используем величину E_m - энергию ионизации с поверхности массивных металлов (работу выхода при фотоэффекте). Ее принято измерять в электронвольтах (1 эВ = $1.60 \cdot 10^{-12}$ эрг).

	Al	Fe	Cu	Me
Работа выхода, эВ	4.28	4.50	4.65	$4.48 = E_m =$ $= 7.17 \cdot 10^{-12}$ эрг

Как видно, изменения сравнительно невелики: масштаб длины примерно в пять раз <u>больше</u> атомного, а масштаб энергии - в пять раз <u>меньше</u> атомного.

Точность оценок δ будем измерять в порядках величины - ϕ - и вычислять по формуле

$$\delta = \left| \lg \frac{exp}{est} \right| \qquad (6)$$

где exp - экспериментальное значение величины, а est - ее оценочное значение, усредняя δ по примерам.

Обратимся к примерам использования этой шкалы.

S01. Оценить теплоту испарения металлов Q_v.

По первому началу термодинамики, теплота имеет смысл разности энергий и размерность энергии. Единственной характерной энергией является E_m - для одного атома. Величину Q_v принято рассчитывать для одного моля (N_A атомов). Отсюда получаем оценку

$$Q_v \sim E_m N_A = 431 \text{ кДж моль}^{-1} \tag{7}$$

Сравним с экспериментом.

	Me	Al	Fe	Cu	$\bar{\delta}$
Теплота испарения Q_v, кДж моль$^{-1}$	431	294	350	315	0.13Ø

S02. Оценить модуль упругости Y металлов.

Модуль упругости (модуль Юнга Y) входит в закон Гука для однородного стержня:

$$\Delta l = \frac{l}{YS} F \tag{8}$$

где Δl - деформация стержня, l - его длина в недеформированном состоянии, S - площадь сечения стержня, F - приложенная сила. Отсюда размерность модуля Юнга $[Y] = \mathrm{EL}^{-3} = \mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$. Из известных нам масштабов энергии E_m и длины a_m строим масштаб нужной размерности - объемной плотности энергии. Отсюда получаем оценку

$$Y \sim E_m a_m^{-3} = 5.4 \cdot 10^{11} \text{ эрг см}^{-3} \tag{9}$$

Сравним с экспериментом.

	Me	Al	Fe	Cu	$\bar{\delta}$
Модуль Юнга Y, 10^{11} эрг см$^{-3}$	5.4	6.8	19	12	0.33Ø

S03. Оценить коэффициент поверхностного натяжения σ жидких металлов.

По физическому смыслу σ есть поверхностная плотность энергии. Ее размерность $[\sigma] = \mathrm{EL}^{-2} = \mathrm{MT}^{-2}$. Из известных нам масштабов энергии E_m и длины a_m строим масштаб нужной размерности. Отсюда получаем оценку

$$\sigma \sim E_m a_m^{-2} = 1.28 \cdot 10^4 \text{ эрг см}^{-2}. \tag{10}$$

Сравним с экспериментом.

	Me	Al	Fe	Cu	$\bar{\delta}$
Коэффициент поверхностного натяжения σ, 10^4 эрг см$^{-2}$	1.28	0.092	0.184	0.135	0.98∅

Согласие значительно хуже, чем в предыдущих примерах. Его можно улучшить, используя модельные соображения: в кубической решетке у атома в объеме $Z = 6$ связей (с ближайшими соседями), а у атома на поверхности - $Z - 1$ связь. Следовательно, для перевода атома из объема на поверхность нужна энергия не E_m, а E_m/Z. У исправленных оценок $\bar{\delta}$=0.20∅, что приемлемо.

S04. Оценить скорость звука v_s в металлах.

Упругие свойства металла характеризуются модулем Юнга Y (см. S02). Инертные свойства вещества определяются его плотностью ρ:

$$[Y] = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}^3} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{LT}^2}, \qquad [\rho] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3} \tag{11}$$

Масштаб скорости (он же - скорость звука)

$$v_s \sim \sqrt{\frac{Y}{\rho}}. \tag{12}$$

Сравним с экспериментом.

	Me	Al	Fe	Cu	$\bar{\delta}$
Скорость звука v_s, 10^5 см с$^{-1}$	2.8	5.08	5.17	3.72	0.22∅

Вернемся к атомным масштабам: без исправлений (без перехода к "конденсированной" шкале) скорость звука есть

$$v_s \sim \sqrt{\frac{\zeta}{A}} v_a \sim \sqrt{\frac{\zeta}{A}} \alpha c \qquad (13)$$

Она мала по сравнению со скоростью света из-за малости постоянной тонкой структуры и большой (в сравнении с массой электрона) массой ядер. ■

Еще несколько задач для самостоятельного решения.

P05. Оценить максимальную частоту ω_+ колебаний атомов в кристаллической решетке твердого тела.

P06. Оценить температуру плавления металлов T_m.

P07. Оценить теплоту плавления металлов Q_m.

Q03< Что можно почитать по этим вопросам?

A03< Классикой жанра считается книга Бриджмена [4]. Недавно появилась в продаже ее офсетная перепечатка. Другим известным источником является монография Седова [5]: ссылка дана на 10-го ее издание (были, кажется, и последующие). Однако эти источники трактуют тему в ином ключе, уделяя мало внимания фундаментальным масштабам.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики. - М.: Наука, 1985. - 334 с. - с. 55-56.

[2] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. В 9-ти тт. Т. 1 - М., Мир. 1965 - 208 с. - с. 23.

[3] Gwynn-Jones T. Farther and Faster. Aviation's Adventuring Years, 1909 - 1939. Allen & Unwin, Sydney (AU), 1991. - xviii+333 p. - p. 218.

[4] Бриджмэн П.В. Анализ размерностей. М.-Л. - ОНТИ-ГТТИ, 1934. - 120 с.

[5] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987. - 432 с.

☯