

---

---

**Квантовая теория**

**Второй поток. Осень 2014**

**Список задач №13**

**Тема: Излучение. Состояния квантованного электромагнитного поля.  
Однофотонные переходы. Атом в резонаторе**

---

---

**13.1 Состояния квантованного электромагнитного поля.**

13.1.1 Оценить концентрацию фотонов в поле электромагнитного излучения, представляющего собой плоскую монохроматическую волну с интенсивностью  $I = 10^8 \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2}$  и частотой  $\omega = 1.77 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

13.1.2 *Когерентным состоянием*  $|\alpha\rangle$  гармонического осциллятора называется нормированное собственное состояние оператора уничтожения  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ,  $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ , где  $\alpha$  - комплексное число. Представить когерентное состояние в виде суперпозиции энергетических состояний  $|n\rangle$ . Для двух когерентных состояний вычислить их скалярное произведение  $\langle\alpha|\beta\rangle$ .

13.1.3 Найти результат воздействия оператора смещения  $D(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a})$  на вакуумное состояние моды электромагнитного поля  $|0\rangle$ . Найти состояние  $D(\beta)D(\alpha)|0\rangle$ .

13.1.4 Доказать, что не существует собственного состояния оператора рождения  $\hat{a}^+$ .

13.1.5 Найти способ вычисления  $\langle\alpha|F(\hat{a}^+, \hat{a})|\alpha\rangle$  для произвольной функции  $F$ .

13.1.6 Найти зависимость от времени среднего значения и дисперсии оператора напряженности электрического поля для квантованного электромагнитного поля в одномодовом когерентном состоянии  $|\alpha\rangle$ .

13.1.7 Гамильтониан моды электромагнитного поля, взаимодействующей с заданным электрическим током, имеет вид  $\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \hbar f(t)(\hat{a}^+ + \hat{a})$ . Пусть начальное состояние поля есть когерентное состояние  $|\alpha\rangle$ . Найти состояние поля в момент  $t > 0$ .

13.1.8 (*Сжатые состояния*) Гамильтониан взаимодействия моды электромагнитного поля с нелинейным кристаллом имеет вид  $\hat{H} = i\hbar(g\hat{a}^{+2} - g^*\hat{a}^2)$ . В начальный момент

времени поле находится в когерентном состоянии  $|\alpha\rangle$ . Найти зависимость от времени дисперсий обобщенных импульса и координаты.

13.1.9 (*Однофотонный лазер*) Принято считать, что одномодовый лазер излучает когерентное состояние поля. Оценить среднюю мощность импульса фемтосекундного лазера видимого диапазона длиной  $\tau = 100 \text{ фс}$ , при которой вероятность того, что в импульсе окажется более одного фотона, в 100 раз меньше того, что в нем окажется ровно один фотон.

### 13.2 Однофотонные переходы.

13.2.1 Оценить скорость спонтанного излучательного перехода атома водорода из состояния  $2s_{1/2}$  в состояние  $2p_{1/2}$ .

13.2.2 Найти зависимость скорости спонтанного излучательного перехода атома водорода из высоковозбужденных состояний от главного квантового числа  $n \gg 1$ .

13.2.3 Вычислить скорость спонтанного радиационного перехода атома водорода из состояния  $2p$  в состояние  $1s$ .

13.2.4 Нейтральная частица со спином  $s = 1/2$  и магнитным моментом  $\mu\vec{s}$  находится в однородном магнитном поле напряженности  $\mathcal{H}$ . Найти время жизни возбужденного состояния и угловое распределение излучения при его распаде.

13.2.5 Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния фотона на электроне.

13.2.6 Найти сечение фотоионизации атома водорода в основном состоянии. ВФ конечного состояния аппроксимировать плоской волной. Исследовать угловое распределение вылетевших электронов.

13.2.7 Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния фотонов нейтральной частицей со спином  $s = 1/2$  и магнитным моментом  $\mu\vec{s}$ .

### 13.3 Атом в резонаторе. Модель Джейнса-Каммингса.

13.3.1 Оценить частоту Раби  $\Omega$  для молекулы (частота перехода  $\omega = 1.50 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ , дипольный матричный элемент  $d_{12} = 1.47 \cdot 10^{-18} \text{ СГС}$ ), взаимодействующей с единственным фотоном резонансной частоты в резонаторе объемом  $V = 7.3 \text{ см}^3$ .

13.3.2 Гамильтониан резонансного взаимодействия одномодового излучения с двухуровневой системой (*модель Джейнса - Каммингса*) имеет вид

$$\hat{H}_{JC} = \frac{\hbar\omega}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + i\hbar \frac{\Omega}{2} (\hat{\sigma}_+ \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-),$$

где  $\sigma_{\pm} = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$ ,  $\sigma_i$  - матрицы Паули. Найти вероятность обнаружить систему в момент времени  $t$  на нижнем уровне с  $m$  фотонами, если в момент 0 система находилась на верхнем уровне с  $n$  фотонами.

13.3.3 Пусть возбужденный двухуровневый атом взаимодействует с одной резонансной модой резонатора с потерями (амплитуда поля затухает со скоростью  $\kappa$ ). Найти зависимость от времени средней энергии атома для случаев слабого ( $\kappa \ll \Omega$ ) и сильного ( $\kappa \gg \Omega$ ) затуханий.

*Указание.* Использовать метод Лэмба - введение феноменологического члена, описывающего затухание, в уравнения для амплитуд: см. [LR50].

 [LR50] W.E.Lamb, Jr. and R.C.Retherford, Fine Structure of the Hydrogen Atom. Part I, Phys.Rev., v.79, №4, pp.549–572 (1950), Appendix II.

13.3.4 Основная мода электромагнитного поля в резонаторе кубической формы с ребром  $L$  изначально находилась в основном состоянии. Оценить (максимальный по модулю) параметр  $\alpha$  когерентного состояния, в которое переведет эту моду электрон, пролетевший через резонатор с постоянной скоростью  $v$ . Взять реалистические значения и дать числовую оценку  $|\beta|$ .