Квантовая теория
Второй поток. Осень 2014
Список задач №11
Тема: Переходы.
Нестационарная теория возмущений.
Внезапные воздействия. Адиабатическое приближение

1. Нестационарная ТВ. Переходы в непрерывном спектре

11.1.1 Масштабом обратного времени, характеризующим величину возмущения, вызывающего переходы, является частота Раби $\Omega = V_{12}/\hbar$, где V_{12} – матричный элемент оператора возмущения между начальным и конечным состояниями. Оценить Ω для атома в поле излучения лазерной указки. Параметры выбрать самостоятельно.

11.1.2 Как известно, применение нестационарной теории возмущений к расчету вероятностей перехода системы из начального n-го состояния в конечное k-е в первом порядке приводит к амплитудам перехода, равным:

$$
\begin{aligned}
a_{kn} &\simeq a_{kn}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} V_{kn}(t)e^{i\omega_{kn}t}dt; \qquad k \neq n; \\
a_{nn} &\simeq 1 - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} V_{nn}(t)dt.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Величина $W_n = |a_{nn}|^2$ представляет вероятность системе остаться в первоначальном состоянии. Если воспользоваться приведенным выше выражением для амплитуды a_{nn}, то получится $W > 1$, что противоречит сохранению нормировки волновой функции состояния. Объяснить возникающий парадокс и получить закон сохранения нормировки волновой функции состояния с учетом переходов в первом порядке теории возмущений.

11.1.3 На частицу, находящуюся при $t \to -\infty$ в основном состоянии в бесконечно глубокой яме шириной a, накладывается слабое однородное поле, изменяющееся со временем по закону:

(а) $V(x,t) = -xF_0 \exp[-t^2/\tau^2]$;

(б) $V(x,t) = -xF_0 \exp[-|t|/\tau]$;

(в) $V(x,t) = -xF_0/(1 + t^2/\tau^2)$.

Вычислить в первом порядке теории возмущений вероятности возбуждения различных состояний частицы при $t \to \infty$. Указать условия применимости полученных результатов.

11.1.4 **Обязательная** Линейный осциллятор подвергается воздействию однородного электрического поля, изменяющегося во времени по закону:

(а) $E(t) = E_0 \exp(-t^2/\tau^2)$;

(б) $E(t) = E_0 \exp(-|t|/\tau)$.

Считая, что до включения поля (при $t \to -\infty$) осциллятор находился в основном состоянии, найти в первом порядке теории возмущений вероятности возбуждения различных его состояний при $t \to \infty$.

11.1.5 **Обязательная.** Вычислить в первом порядке нестационарной теории возмущений зависимость вероятности W_{12} перехода между уровнями 1 и 2 под действием нестационарного возмущения, представляющего собой импульс неизменной формы:

$$\hat{V}(t) = \hat{V}_0 f\left(\frac{t}{\tau}\right), \tag{2}$$

где τ – характерная длительность импульса, от параметра $\gamma = \omega_{12}\tau$.

11.1.6 На плоский ротатор, имеющий дипольный момент d, накладывается однородное, переменное во времени электрическое поле $\mathscr{E}(t) = f(t)\mathscr{E}_0$. До включения поля ротатор имел определенное значение m проекции момента. Вычислить в первом порядке теории возмущений вероятности различных значений проекции момента и энергии ротатора при $t \to \infty$. Рассмотреть конкретные зависимости $\mathscr{E}(t)$ вида, указанного в условии задачи 11.1.4.

11.1.7 В условиях задачи 11.1.4 найти во втором порядке теории возмущений вероятности переходов осциллятора , запрещенные в первом порядке. Сравнить вероятности $W[n \to n \pm 2]$ и $W[n \to n \pm 1]$.

11.1.8 На частицу, находящуюся при $t < 0$ а n-м стационарном состоянии в поле $U(x) = -\alpha\delta(x)$, при $t > 0$ накладывается слабое однородное поле вида $V(x,t) = -xF_0 \sin\omega_0 t$. Найти вероятность $W_0(t)$ того, что частица к моменту t останется связанной в поле ямы. Считать $\hbar\omega_0 \gg |E_0|$ ($|E_0|$ – энергия связи частицы; для частиц с энергией $E \gg |E_0|$ действие потенциала можно рассматривать как возмущение).

11.1.9 Решить предыдущую задачу при произвольной частоте возмущения. Может ли частица «покинуть» яму, если $\hbar\omega_0 < |E_0|$?

11.1.10 Частица находится в одномерном поле $U(x)$; $U(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Рассматривая действие поля как возмущение, найти коэффициенты отражения и прохождения частиц с энергией E с помощью теории возмущений в непрерывном спектре. Указать условия применимости рассмотрения.

11.1.11 Вычислить вероятность перехода между уровнями 1 и 2 под действием нестационарного возмущения

$$\hat{V}(t) = \hat{V}_0 f(t)\cos\omega t\,, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\alpha t}\,,\ t < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\alpha t}\,,\ t \geq 0 \end{cases},$$

считая, что при $t \to -\infty$ система находилась в состоянии ψ_1.

11.1.12 **Обязательная.** Пусть атомная система, рассмотренная в предыдущей задаче, подвергается действию периодического возмущения

$$W(t) = We^{-i\omega t} + W^{\dagger}e^{i\omega t}. \tag{3}$$

Обсудить вопрос о резонансном поглощении и выяснить, каким образом влияет на вероятность переходов конечная ширина спектральной линии возмущающего поля.

11.1.13 Пользуясь импульсным представлением и ограничиваясь первым порядком нестационарной теории возмущений, получить выражение для дифференциального сечения рассеяния. Считать, что возмущение включается в момент времени $t = 0$, а затем остается постоянным.

11.1.14 Пусть на расстоянии b (прицельное расстояние) от атома щелочного металла пролетает электрон. Скорость электрона v предполагается большой по сравнению со скоростью валентного электрона в атоме. В результате кулоновского взаимодействия атом может перейти в возбужденное состояние. С помощью нестационарной теории возмущений рассчитать эффективное сечение такого процесса.

11.1.15 На атом водорода, находящийся в основном состоянии, падает линейно поляризованная световая волна ($E \| x$,$H \| y$), распространяющаяся в положительном направлении оси z. Найти угловое распределение фотоэлектронов и вычислить дифференциальное сечение фотоэффекта. Считать, что электроны в конечном состоянии приближенно можно описывать плоскими волнами. Эффекты запаздывания не учитывать.

11.1.16 На двухуровневую систему (частота перехода $\omega_{12} = \omega_0$) деиствует импульс гармонического поля вида $V(t) = V_0 \exp(-\alpha t + i\omega t)$. Параметры импульса можно менять так, чтобы его полная энергия (интеграл от интенсивности по времени) оставалась постояннои. При каком значении α вероятность перехода будет максимальна?

2. Внезапные воздействия.

11.2.1 **Обязательная.** Частица находится в поле с потенциалом:

$$\begin{aligned} &U_1(x,t) = -q_1\delta(x), \quad t < 0; \\ &U_2(x,t) = -q_2\delta\left(x\right), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

(в момент $t = 0$ емкость ямы скачком меняется). При $t < 0$ частица находится в основном (связанном) состоянии. Вычислить вероятность w_{00} перехода частицы в связанное состояние при $t > 0$ как функцию параметра $\xi = q_2/q_1$.

11.2.2 Частица находится в поле с потенциалом:

$$\begin{aligned} &U_1(x,t) = -q\delta(x), \quad t < 0; \\ &U_2(x,t) = -q\delta(x-a), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

(в момент $t > 0$ яма скачком передвигается на расстояние a). При $t < 0$ частица находится в основном (связанном) состоянии. Вычислить вероятность w_{00} перехода частицы в связанное состояние при $t > 0$ как функцию параметра $\eta = mqa/\hbar^2$.

11.2.3 **Обязательная.** Частица находится в поле с потенциалом:

$$\begin{aligned} &U_1(x,t) = -q\delta(x), \quad t < 0; \\ &U_2(x,t) = -q\delta(x-vt), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{6}$$

(в момент $t > 0$ яма внезапно приходит в движение с постоянной скоростью v). При $t < 0$ частица находится в основном (связанном) состоянии. Вычислить вероятность w_{00} перехода частицы в связанное состояние при $t > 0$ как функцию параметра $\zeta = \hbar v/q$.

11.2.4 Частица находится в поле с потенциалом:

$$\begin{aligned} &U_1(x,t) = -q\delta(x), \quad t < 0; \\ &U_2(x,t) = -q\delta\left(x - \frac{gt^2}{2}\right), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

(в момент $t = 0$ яма внезапно приходит в движение с постоянным ускорением g). При $t < 0$ частица находится в основном (связанном) стоянии. Вычислить вероятность w_{00} перехода частицы в связанное состояние при $t > 0$ как функцию параметра $\nu = g\hbar^4/mq^3$.

11.2.5 В рамках нестационарной теории возмущений получить выражения для вероятностей переходов системы под действием возмущений, зарактеризующихся следующей временной зависимостью:

(a) мгновенное включение:

$$\begin{aligned} &\hat{V}(t) = 0, \quad t < 0 \\ &\hat{V}(t) = \hat{V}_0, \quad t > 0 \quad (\hat{V}_0 \text{ не зависит от времени}) \end{aligned} \tag{8}$$

(б) «импульсное» действие: $\hat{V}(t) = \hat{W}_0\delta(t)$.

Каково условие применимости полученных выражений, если включение (и выключение в случае (б)) возмущения происходит не мгновенно, а за конечное время τ?

11.2.6 Система, описываемая гамильтонианом $\hat{H}_0$, находится в n-м стационарном состоянии дискретного спектра. При $t = 0$ гамильтониан системы внезапно изменяется и становится равным (при $t > 0$) $\hat{\hat{H}} = \hat{H}_0 + \hat{V}_0$ ($\hat{H}_0$ и $\hat{V}_0$ от времени не зависят). Найти вероятности различных стационарных состояний системы при $t > 0$. В случае малого возмущения $\hat{V}_0$ сравнить с результатом предыдущей задачи.

11.2.7 **Обязательная.** Двухуровневая система находится в основном состоянии. При $t > 0$ она подвергается действию постоянного возмущения с недиагональным матричным элементом V. Вычислить зависимость от времени вероятности $w(t)$ перехода в возбужденное состояние.

11.2.8 Вычислить вероятность перехода атома трития H^3, находившегося в основном ($1s$) состоянии, в основное ($1s$) и первое возбужденное ($2s$) состояния иона He^{3+} при β-распаде ядра, считая, что распад происходит мгновенно.

11.2.9 Гамильтониан системы имеет вид $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}_0\delta(t)$. При $t < 0$ система находилась в n-м стационарном состоянии дискремтного спектра. Найти вероятности различных стационарных состояний системы при $t > 0$. Для слабого возмущения $\hat{V} = \hat{W}_0\delta(t)$ сравнить с результатом задачи 11.2.5. Для случая $\hat{W}_0 = -xP_0$ дать наглядную интерпретацию полученного результата.

11.2.10 Частица находится в основном состоянии в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной a ($0 < x < a$). В некоторый момент времени правая стенка ямы за короткий интервал времени τ смещается в точку b ($b > a$). Найти вероятности возбуждения различных стационарных состояний частицы после остановки стенки. Указать условия применимости полученных результатов. Рассмотреть случай $b = 2a$.

11.2.11 Частица находится в основном состоянии в мелкой прямоугольной потенциальной яме шириной a. Внезапно ширина ямы изменяется до значения $b \sim a$, глубина ямы при этом не меняется. Какова вероятность того, что при этом частица покинет яму? Какова средняя энергия частицы, покидающей яму?

11.2.12 Решить задачу типа предыдущей в случае, когда меняется в $n \sim 1$ раз потенциальная энергия (глубина ямы), а ширина остается неизменной.

11.2.13 На заряженный осциллятор, находящийся в основном состоянии, внезапно накладывается однородное электрическое поле, направленное вдоль оси колебаний. Найти вероятности возбуждения различных состояний осциллятора после включения поля.

11.2.14 У линейного осциллятора, находящегося в основном состоянии, в момент времени $t = 0$ «точка подвеса» начинает двигаться с постоянной скоростью V. Найти вероятности возбуждения различных состояний осциллятора при $t > 0$.

3. Адиабатическое приближение.

11.3.1 **Обязательная.** Гамильтониан $\hat{H}(\hat{p}, q, \lambda(t))$ некоторой системы, совершающей одномерное финитное движение, явно зависит от времени. Для каждого момента времени t предполагаются известными спектр собственных значений $E_n(t)$ «мгновенного» гамильтониана и полная система соответствующих ортонормированных собственных функций $\psi_n(q,t)$. Записать волновое уравнение для системы по представлении, базисом которой является системы функций $\psi_n(q,t)$.

11.3.2 Гамильтониан системы, охарактериизованной в предыдущей задаче, является медленно меняющейся функцией времени t. Предполагая систему находящейся при $t = 0$ в n-м квантовом состоянии, найти ее волновую функцию при $t > 0$ в первом порядке адиабатической теории возмущений и указать условия применимости результата.

11.3.3 На заряженный осциллятор, находящийся при $t \to -\infty$ в основном состоянии, накладывается однородное электрическое поле вида:

(а) $\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0 \exp(-|t|/\tau)$;

(б)
$$\begin{aligned} &\mathscr{E}(t) = 0, \quad t < 0; \\ &\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0(1 - e^{-t/\tau}), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Найти вероятности возбуждения различных состояний осциллятора при $t \to \infty$ в первом порядке адиабатчиеской теории возмущений. Указать условия применимости полученных результатов.

11.3.4 На плоский ротатор, имеющий дипольный момент d и находящийся в основном состоянии, при $t > 0$ накладывается однородное электрическое поле вида $\mathbf{E}(t) = E(t)\mathbf{n_0}$, где $E(t) = E_0[1 - \exp(-t/\tau)]$. Найти функцию распределения по проекциям момента ротатора при $t \to +\infty$ в случае $dE_0 t \gg \hbar^2$, но $dE_0 t^2 \ll \tau\hbar^3$ (сильное медленно включаемое поле).

11.3.5 Частица находится в поле двух δ-функционных ям

$$U(x,t) = -\alpha[\delta(x - L(t)/2) + \delta(x + L(t)/2)].$$

При $t \to -\infty$ ямы находились на бесконечно большом расстоянии друг от друга и частица была связана одной из ям. Расстояние между ямами $L(t)$ медленно уменьшается, и в некоторый момент времени T ямы «сливаются» в одну: $U(x) = -2\alpha\delta(x)$. Какова вероятность того, что при этом частица останется в связанном состоянии?