Квантовая теория
Второй поток. Осень 2014
Список задач №9
Тема: Системы частиц
Композитные системы и матрица плотности.
Системы взаимодействующих частиц. Тождественные частицы.
Идеальный ферми-газ.

1. Композитные системы и матрица плотности

9.1.1 Верно ли, что чем больше чистота состояния кубита $\pi = \mathrm{Tr}\rho^2$, тем меньше его энтропия $S = -\mathrm{Tr}\,(\rho \log \rho)$?

9.1.2 Представить рассмотренные на лекции однокубитные матрицы плотности $\rho_i, (1 \le i \le 5)$ в виде разложений по ансамблям чистых состояний

$$\rho = \sum_n p_n \left|\psi_n\right\rangle \left\langle\psi_n\right| .$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$
$$\rho_4 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad \rho_5 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

9.1.3 Возможно ли, что

$$\rho = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| = \sum_i q_i \left|\varphi_i\right\rangle \left\langle\varphi_i\right|$$

для $\left|\psi_i\right\rangle \ne \left|\varphi_j\right\rangle$ и $p_i \ne q_i$? Если нет – доказать, если да – привести пример.

9.1.4 **(Обязательная задача)** Кубит находится в состоянии, описываемом матрицей плотности общего вида

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} \end{pmatrix}.$$

Какова вероятность получить исходы +1 и -1 при измерении наблюдаемых, описываемых матрицами Паули σ_x, σ_y и σ_z?

9.1.5 Матрица плотности двухкомпонентной смеси имеет вид $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2, \quad 0 \le \lambda \le 1$. Доказать, что для энтропии $S(\rho)$ выполняется неравенство $S(\rho) \ge \lambda S(\rho_1) + (1-\lambda) S(\rho_2)$.

9.1.6 Фиделити для смешанных состояний определяется как

$$\mathfrak{F}(\rho_1, \rho_2) = \left(\mathrm{Tr}\sqrt{\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}}\right)^2 .$$

Используя для однокубитной матрицы плотности параметризацию $\rho = \rho(\vec{P}) = 1/2\left(1 + \vec{\sigma}\vec{P}\right)$, где $\vec{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ – вектор матриц Паули, показать, что

$$\mathfrak{F}(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2}\left(1 + \vec{P}_1\vec{P}_2 + \sqrt{(1-|\vec{P}_1|^2)(1-|\vec{P}_2|^2)}\right).$$

9.1.7 **(Обязательная задача)**Пусть система двух частиц со спином $1/2$ находится в чистом состоянии со спиновой функцией

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\uparrow\rangle + \beta\,|\uparrow\downarrow\rangle + \gamma\,|\downarrow\uparrow\rangle + \delta\,|\downarrow\downarrow\rangle\,.$$

Показать, что энтропии подсистем (спинов 1 и 2) равны.

9.1.8 Рассмотрим композитную систему с матрицей плотности ρ_{12} и матрицами плотности подсистем $\rho_{1(2)} = \mathrm{Tr}2(1)\rho_{12}$. Доказать *субаддитивность* энтропии фон Неймана:

$$S(\rho_{12}) \le S(\rho_1) + S(\rho_2)$$

9.1.9 Две частицы находятся в состоянии с волновой функцией

$$\psi(x_1, x_2) = \mathcal{N}\exp\left(-\frac{(x_1+x_2)^2}{2a^2}\right)\exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{2b^2}\right),$$

где $\mathcal{N}$ – нормировочный коэффициент. Определить энтропию состояния каждой из частиц.

9.1.10 Пусть центр масс атома водорода в основном состоянии локализован и неподвижен. Оценить кинетическую энергию протона.

9.1.11 Показать, что чистота состояния $\pi = \mathrm{Tr}\rho^2$ не меняется при унитарной эволюции.

2. Системы взаимодействующих частиц. Тождественные частицы.

9.2.1 Найти энергетический спектр системы двух одинаковых частиц, взаимодействующих потенциалом

$$V(x-y) = \begin{cases} \infty, & |x-y| \le d, \\ 0, & |x-y| > d \end{cases}$$

(модель твердых стержней) и помещенных в потенциальный ящик (см. L11, п. 2)

$$U(x) = U(y) = \begin{cases} \infty, & |x|, |y| > a, \\ 0, & |x|, |y| \le a. \end{cases}$$

9.2.2 Два атома водорода, находящиеся в основном состоянии, расположены на расстоянии R друг от друга. Считая ядра атомов покоящимися, показать, что в первом порядке теории возмущений энергия взаимодействия атомов равна нулю и что учет второго порядка теории возмущений приводит к силам притяжения Ван-дер-Ваальса.

9.2.3 **(Обязательная задача)** Вычислить энергию основного состояния E_0 одномерной системы N невзаимодействующих фермионов (со спином $1/2$)

a) помещенных в потенциальный ящик длины L – поле с потенциалом

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & |x| > L, \\ 0, & |x| \le L; \end{cases}$$

b) помещенных в поле с потенциалом гармонического осциллятора

$$U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2;$$

c) для случая b) найти линейную плотность частиц $\rho(x)$ при $N \gg 1$, используя метод ВКБ.

9.2.4 Две тождественные частицы (бозоны - или фермионы с разными проекциями спина) находятся в (одномерном) потенциальном поле в состоянии с ВФ

$$\psi(x_1, x_2) = N \exp\left(-\frac{x_1^2}{2} - \alpha x_1 x_2 - \frac{x_2^2}{2}\right),$$

где N – нормировочный коэффициент. Найти закон взаимодействия частиц.

9.2.5 **(Обязательная задача)** Найти энергию основного и первого возбужденного состояния трех частиц, находящихся в потенциале гармонического осциллятора $U(x_i) = m\omega^2 x^2/2$ и взаимодействующих гармоническим потенциалом $V(x_i - x_j) = \frac{1}{2}m\Omega^2(x_i - x_j)^2$, рассмотреть случаи

a) бозонов со спином 0,

b) фермионов со спином 1/2.

9.2.6 Найти зависимость от числа частиц N радиуса области локализации системы тождественных взаимодействующих частиц, притягивающихся попарно осцилляторным потенциалом $U(\vec{r}_{ij}) = \frac{1}{2}\vec{r}_{ij}^{\,2}$ в основном состоянии, если частицы суть

a) бозоны;

b) фермионы со спином 1/2.

9.2.7 Вычислить плотность состояний для частиц с законом дисперсии $E = cp$ (ультрарелятивистский случай) в непроницаемом d-мерном ящике при $d = 1, 2$ и 3. Нарисовать графики $\rho(E)$.

2. Идеальный ферми-газ

9.3.1 Вычислить среднюю величину скорости нуклонов в ядре, считая протоны и нейтроны компонентами идеального ферми-газа.

9.3.2 **(Обязательная задача)** Считая протоны и нейтроны в ядре компонентами ферми-газа и учитывая кулоновское отталкивание протонов, найти отношение Z/A для наиболее устойчивых изотопов тяжелых ядер.

9.3.3 Эмпирическая формула Вайцзеккера для энергии связи ядер содержит член, учитывающий протон-нейтронную асимметрию:

$$T_A = -\varepsilon\frac{(A-2Z)^2}{A},$$

где $\varepsilon = 23.7$ МэВ. Вычислить этот коэффициент, считая протоны и нейтроны в ядре компонентами идеального ферми-газа.

9.3.4 Оценить концентрацию электронов, при которой электронный ферми-газ в основном состоянии становится релятивистским.

9.3.5 **(Обязательная задача)** Оценить максимальную массу белого карлика, считая его вещество включающим релятивистский электронный ферми-газ.

9.3.6 Описывая электроны проводимости в металле моделью ферми-газа, вычислить модуль всестороннего сжатия

$$B = V\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\right)_N$$

и сравнить с экспериментальными данными для щелочных металлов.

9.3.7 Обосновать экспериментальными данными правило вычисления концентрации свободных электронов в металлах $n_e = n_a V$, где n_a – концентрация атомов, V – валентность металла.

9.3.8 Считая протоны и нейтроны в ядре компонентами идеального ферми-газа, оценить плотность состояний для ядер вблизи основного состояния и сравнить с экспериментальными данными для железа и молибдена.