

---

---

Квантовая теория

Второй поток. Весна 2014

Список задач №7

Тема «Центральное поле»

---

---

**7.1. Разделение переменных, общая структура спектра, квантовые числа.**

**7.1.1. (Обязательная)** Показать, что в центральном поле в случае дискретного спектра минимальное значение энергии при заданном  $l$  ( $l$ - орбитальное квантовое число) растет с увеличением  $l$ .

**7.1.2.** Частица находится в центральном поле в состоянии  $\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \cdot \frac{1}{r} \cdot e^{-r/a}$ . Найти среднее значение  $\langle r \rangle$ .

**7.1.3. (Обязательная)** Определить уровни энергии сферического осциллятора (частица в поле  $U = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$ ), кратности их вырождения, и возможные значения орбитального момента в соответствующих стационарных состояниях.

**7.1.4.** Найти волновую функцию для свободной частицы в  $s$ -состоянии.

**7.1.5.** Радиальная ВФ стационарного состояния в центральном поле имеет вид

$$c(r) = r^2(1 - ar)e^{-br}.$$

Определить:

- а) значение орбитального квантового числа  $l$ ;
- б) значение энергии  $E$ ;
- в) явный вид потенциала  $U(r)$ .

**7.1.6.** Показать, что в потенциале трехмерной  $\delta$ -ямы существуют бесконечно глубокие  $s$ -уровни ("падение на центр").

**7.2. Атом водорода – частица в кулоновском поле.**

**7.2.1.** Для основного состояния атома водорода найти наиболее вероятное расстояние между электроном и ядром.

**7.2.2. (Обязательная)** Для основного состояния атома водорода найти среднее значение величины кулоновской силы, действующей на электрон и среднее значение потенциальной энергии электрона в поле ядра.

**7.2.3.** Найти для  $1s$  состояния атома водорода среднее расстояние  $\langle r \rangle$ , дисперсию  $\langle (\Delta r)^2 \rangle$ , а также среднее обратное расстояние  $\langle \frac{1}{r} \rangle$  между электроном и ядром.

**7.2.4.** Определить энергию атома водорода в стационарном состоянии с волновой функцией  $y = A \cdot (1 + a \cdot r) \cdot e^{-a \cdot r}$

**7.2.5.** Найти распределение вероятностей значений импульса в основном состоянии атома водорода.

**7.2.6.** Атом водорода в состоянии с  $l = n - 1$  помещен в однородное постоянное магнитное поле с напряженностью  $H = 10^4$  Гс, Найти значение  $n$ , при котором ширина зеемановского мультиплета будет равна частоте перехода между уровнями  $n$  и  $n - 1$ .

**7.2.7. (Обязательная)** Вычислить разность  $\Delta l$  длин волн излучения, испускаемого при переходах между состояниями  $3p$  и  $2s$  в атомах водорода и дейтерия.

**7.2.8.** Определить средний потенциал электрического поля, создаваемый атомом водорода в основном состоянии.

а) Существует ли связанное состояние электрона в поле с таким потенциалом? Такая модель была бы полезна при рассмотрении отрицательного иона водорода  $H_1^-$ .

### **7.3. Короткодействующие потенциалы: условия существования связанных состояний.**

**7.3.1.** Дейтрон имеет энергию связи  $E = 2.22$  МэВ. Описывая взаимодействие нуклонов в дейтроне моделью сферической ямы, найти зависимость  $U_0(a)$ , обеспечивающую правильное значение энергии связи, в области  $a = 2 \dots 3$  фм.

**7.3.2. (Обязательная)** Взаимодействие между протоном и нейтроном в дейтроне можно описать потенциалом  $U(r) = -A \cdot e^{-r/a}$ . Найти волновую функцию основного состояния ( $l=0$ ), а также связь между глубиной ямы  $A$  и величиной  $a$ , характеризующей радиус действия сил.

**7.3.3.** Частица находится в центральном поле  $U = -\frac{A}{r^s}$ ,  $A > 0$ . Определить, при каких значениях  $s$  возможны устойчивые состояния системы.

**7.3.4. (Обязательная)** Определить уровни энергии для движения частицы с моментом  $l=0$  в сферической потенциальной яме  $U(r) = -U_0$  при  $r < a$ ,  $U(r) = 0$  при  $r > a$

**7.3.5.** Определить порядок расположения уровней энергии с различными значениями момента  $l$  в сферической потенциальной яме (при значении борновского параметра  $B \gg 1$ ).

**7.3.6.** Определить последовательность, в которой появляются в сферической потенциальной яме состояния дискретного спектра с различными  $l$  по мере увеличения борновского параметра  $B$ .

**7.3.7.** Доказать, что в любом монотонном потенциале притяжения  $U(r)$  таком, что

$$\max_r r^2 |U(r)| > \frac{(p\hbar)^2}{8m}$$

существует по меньшей мере одно связанное состояние.

**7.3.8.** Для потенциала  $U(r) = -qd(r - R)$  (потенциал *сферической оболочки*) определить:

- а) число связанных  $S$  - состояний;
- б) полное число связанных состояний.

**7.3.9.** Доказать, что для существования связанного состояния в потенциале притяжения  $U(r) < 0$  необходимо выполнение условия

$$\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^{\infty} |U(r)| r dr \geq 1$$

(неравенство Иоста - Пайса).