
Квантовая теория**Второй поток. Весна 2014****Список задач №7****Тема «Центральное поле»**

7.1. Разделение переменных, общая структура спектра, квантовые числа.

7.1.1. (Обязательная) Показать, что в центральном поле в случае дискретного спектра минимальное значение энергии при заданном l (l - орбитальное квантовое число) растет с увеличением l .

7.1.2. Частица находится в центральном поле в состоянии $\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \cdot \frac{1}{r} \cdot e^{-r/a}$. Найти среднее значение $\langle r \rangle$.

7.1.3. (Обязательная) Определить уровни энергии сферического осциллятора (частица в поле $U = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$), кратности их вырождения, и возможные значения орбитального момента в соответствующих стационарных состояниях.

7.1.4. Найти волновую функцию для свободной частицы в s -состоянии.

7.1.5. Радиальная ВФ стационарного состояния в центральном поле имеет вид

$$c(r) = r^2(1 - ar)e^{-br}.$$

Определить:

- значение орбитального квантового числа l ;
- значение энергии E ;
- явный вид потенциала $U(r)$.

7.1.6. Показать, что в потенциале трехмерной δ -ямы существуют бесконечно глубокие s -уровни ("падение на центр").

7.2. Атом водорода – частица в кулоновском поле.

7.2.1. Для основного состояния атома водорода найти наиболее вероятное расстояние между электроном и ядром.

7.2.2. (Обязательная) Для основного состояния атома водорода найти среднее значение величины кулоновской силы, действующей на электрон и среднее значение потенциальной энергии электрона в поле ядра.

7.2.3. Найти для $1s$ состояния атома водорода среднее расстояние $\langle r \rangle$, дисперсию $\langle (\Delta r)^2 \rangle$, а также среднее обратное расстояние $\langle \frac{1}{r} \rangle$ между электроном и ядром.

7.2.4. Определить энергию атома водорода в стационарном состоянии с волновой функцией $y = A \cdot (1 + a \cdot r) \cdot e^{-a \cdot r}$

7.2.5. Найти распределение вероятностей значений импульса в основном состоянии атома водорода.

7.2.6. Атом водорода в состоянии с $l = n - 1$ помещен в однородное постоянное магнитное поле с напряженностью $H = 10^4$ Гс, Найти значение n , при котором ширина зеемановского мультиплета будет равна частоте перехода между уровнями n и $n - 1$.

7.2.7. (Обязательная) Вычислить разность Δl длин волн излучения, испускаемого при переходах между состояниями $3p$ и $2s$ в атомах водорода и дейтерия.

7.2.8. Определить средний потенциал электрического поля, создаваемый атомом водорода в основном состоянии.

а) Существует ли связанное состояние электрона в поле с таким потенциалом? Такая модель была бы полезна при рассмотрении отрицательного иона водорода H_1^- .

7.3. Короткодействующие потенциалы: условия существования связанных состояний.

7.3.1. Дейтрон имеет энергию связи $E = 2.22$ МэВ. Описывая взаимодействие нуклонов в дейтроне моделью сферической ямы, найти зависимость $U_0(a)$, обеспечивающую правильное значение энергии связи, в области $a = 2...3$ фм.

7.3.2. (Обязательная) Взаимодействие между протоном и нейтроном в дейтроне можно описать потенциалом $U(r) = -A \cdot e^{-r/a}$. Найти волновую функцию основного состояния ($l=0$), а также связь между глубиной ямы A и величиной a , характеризующей радиус действия сил.

7.3.3. Частица находится в центральном поле $U = -\frac{A}{r^s}$, $A > 0$. Определить, при каких значениях s возможны устойчивые состояния системы.

7.3.4. (Обязательная) Определить уровни энергии для движения частицы с моментом $l=0$ в сферической потенциальной яме $U(r) = -U_0$ при $r < a$, $U(r) = 0$ при $r > a$

7.3.5. Определить порядок расположения уровней энергии с различными значениями момента l в сферической потенциальной яме (при значении борновского параметра $B \gg 1$).

7.3.6. Определить последовательность, в которой появляются в сферической потенциальной яме состояния дискретного спектра с различными l по мере увеличения борновского параметра B .

7.3.7. Доказать, что в любом монотонном потенциале притяжения $U(r)$ таком, что

$$\max_r r^2 |U(r)| > \frac{(p\hbar)^2}{8m}$$

существует по меньшей мере одно связанное состояние.

7.3.8. Для потенциала $U(r) = -qd(r - R)$ (потенциал *сферической оболочки*) определить:

- а) число связанных S - состояний;
- б) полное число связанных состояний.

7.3.9. Доказать, что для существования связанного состояния в потенциале притяжения $U(r) < 0$ необходимо выполнение условия

$$\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^{\infty} |U(r)| r dr \geq 1$$

(неравенство Иоста - Пайса).