Квантовая теория
Второй поток. Весна 2014
Список задач №6
Тема «Угловой момент»

<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

Компоненты оператора углового момента $\hat{\vec{J}}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[\hat{J}_\alpha, \hat{J}_\beta\right] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{J}_\gamma \quad (*)$$

Повышающий $\hat{J}_+$ и понижающий $\hat{J}_-$ операторы определяются как

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$$

>>>

6.1. Алгебра операторов момента

6.1.1. Пусть $\hat{a}$ и $\hat{b}$ - операторы Бозе:

$$\left[\hat{a},\hat{a}^+\right]=1, \quad \left[\hat{b},\hat{b}^+\right]=1, \quad \left[\hat{a},\hat{b}\right]=\left[\hat{a},\hat{b}^+\right]=0.$$

Показать, что можно положить

$$\hat{J}_1 = \frac{\hat{a}^+\hat{b}+\hat{b}^+\hat{a}}{2}, \qquad \hat{J}_2 = \frac{\hat{a}^+\hat{b}-\hat{b}^+\hat{a}}{2i}$$

Найти вид операторов $\hat{J}_3$ и $\hat{J}^2$ в этом *представлении Швингера*.

6.1.2. Пусть $\hat{a}$ - оператор Бозе. Показать, что операторы

$$\hat{J}_+ = \hat{a}^+\left(2J-\hat{a}^+\hat{a}\right)^{1/2}, \;\; \hat{J}_- = \left(2J-\hat{a}^+\hat{a}\right)^{1/2}\hat{a}$$

где J - число, удовлетворяют (вместе с соответствующим $\hat{J}_3$) коммутационным соотношениям $\left[\hat{J}_\alpha, \hat{J}_\beta\right] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{J}_\gamma$ (*представление Холстейна - Примакова*).

6.1.3. Установить соотношение неопределенностей между дисперсиями компонент $\hat{J}_1$ и $\hat{J}_2$ оператора углового момента в состоянии с фиксированным значением $\hat{J}_3$.

6.1.4. **(обязательная)** Пусть имеет место следующее равенство:

$$e^{i\hat{J}_x}e^{i\hat{J}_y}e^{i\hat{J}_z} = e^{i\left(a\hat{J}_x+b\hat{J}_y+c\hat{J}_z\right)}.$$

Найти коэффициенты a, b и c.

МОТИВАЦИЯ. По первому впечатлению задача напоминает 2.5.4 и равенство Бейкера – Кемпбелла – Хаусдорфа. Но это ошибка: там только два оператора. И второе: ответ для задачи «без параметров» удивительный.

6.2. Орбитальный момент. Сферические гармоники.

6.2.1. Найти закон преобразования шаровых функций Y_{11}, Y_{10}, $Y_{1,-1}$ при повороте системы координат, характеризуемом углами Эйлера ϑ, ψ, φ.

Указание: представить шаровые функции в виде

$$Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x+iy}{r},\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r}, Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x-iy}{r}.$$

6.2.2. Показать, что следующие волновые функции являются собственными для операторов $\hat{l}_z$ и $\hat{l}^2$:

$$\psi_0(\vec{r}) = g(r),$$

$$\psi_1(\vec{r}) = zg(r),$$

$$\psi_2(\vec{r}) = (x+iy)g(r),$$

$$\psi_3(\vec{r}) = (3z^2 - r^2)g(r),$$

$$\psi_4(\vec{r}) = (x-iy)^2 g(r),$$

$$\psi_5(\vec{r}) = z(x+iy)g(r),$$

где $g(r)$ – произвольная функция. Найти соответствующие данным волновым функциям собственные значения.

6.2.3. **(обязательная)** Сферические гармоники, будучи выраженными в декартовых координатах, могут быть представлены в виде $r^{-l}\times$(однородный полином степени l от переменных x, y, z). Условие ортонормированности сферических гармоник запишем в виде

$$\int Y_{l',m'}(\theta,\varphi)\cdot\int Y_{l,m}(\theta,\varphi)d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \qquad d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi.$$

а) Верно ли, что все состояния, описываемые волновой функцией вида $\psi(x,y,z) = \frac{1}{r^2}\times$(однородный полином второй степени)$\times f(r)$ являются собственными функциями орбитального момента с $l = 2$?

Являются ли все состояния, описываемые волновой функцией вида $\psi(x,y,z)=\frac{1}{r}\times$(однородный полином первой степени)$\times\ f(r)$ собственными функциями оператора $\hat{l}^2$ для $l=1$?

б) Какие из нижеперечисленных функций являются сферическими гармониками:

$\cos^2\theta\cdot e^{2i\varphi}$, $\sin^2\theta\cdot e^{2i\varphi}$, $\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot e^{2i\varphi}$, $\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot e^{i\varphi}$?

в) Напишите наиболее общий вид однородного полинома второй степени, который, будучи умноженным на радиальную функцию, соответствует состояниям со значением $l_z=0$. Используйте свойство ортогональности сферических гармоник с разными значениями l для нахождения состояния с $l=2$.

г) Используйте пространственную инверсию относительно плоскости $y=0$, чтобы показать, что с точностью до фазы $Y_{l,-m}(\theta,\varphi)=Y_{l,m}(\theta,-\varphi)$ и запишите в полярных и декартовых координатах все нормированные сферические гармоники типа $Y_{l=2,m}(\theta,\varphi)$.

6.2.4. Получить выражение для плотности тока $\vec{j}(r,\theta,\varphi)$ для волновой функции следующего вида:

$$\psi(r,\theta,\phi)=f(r)Y_{l,m}(\theta,\phi),$$

значения орбитального момента $l=1$ и различных значений *m*.

6.2.5**. (обязательная)** Предположим, что возможны полуцелые значения орбитального момента, например, $l=1/2$. Тогда для соответствующей сферической функции будет иметь место следующее операторное соотношение:

$$\hat{l}_+Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\phi)=0$$

откуда следует, что

$$Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\varphi)\propto e^{i\varphi/2}\sqrt{\sin\theta}.$$

Покажите, что получение выражения для $Y_{-1/2}^{1/2}(\theta,\varphi)$ двумя способами – а) путем воздействия $\hat{l}_-$ на $Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\varphi)$ и б) с использованием соотношения $\hat{l}_-Y_{-1/2}^{1/2}(\theta,\phi)=0$ – приводит к противоречию.

6.2.6. Волновая функция частицы задана следующим образом:

$$\psi(\rho,\phi)=Ae^{-\rho^2/2\Delta}\cos^2\varphi.$$

Определить вероятности наблюдения частицы в состояниях с $l_z=0$, $l_z=2\hbar$, $l_z=-2\hbar$.

6.2.7. Плоский ротатор приведен в состояние с волновой функцией

$$\Phi(\varphi) = A(1+\cos\varphi+\cos 2\varphi) .$$

Найти наблюдаемые значения $\hat{l}_z$, вероятности их обнаружения и $\left\langle \hat{l}_z \right\rangle, \left\langle (\Delta\hat{l}_z)^2 \right\rangle$.

6.2.8. **(обязательная)** Гамильтониан ротатора, помещенного в однородное магнитное поле $\vec{B} = B_0\hat{e}_z$, имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2I} + \omega_0 \hat{L}_z ,$$

где ω_0 является константой. Пусть

$$\left\langle \theta,\varphi \middle| \psi(0) \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta \sin\varphi ,$$

требуется найти величину $\left\langle \theta,\varphi \middle| \psi(t) \right\rangle$. Как меняется величина $\left\langle \hat{L}_x \right\rangle$ со временем?

6.2.9. Частица находится в состоянии, описываемом волновой функцией

$$\psi = N(x+y+2z)e^{-\alpha r} ,$$

где N – нормировочный фактор.

а) Показать, записав $Y_1^{\pm 1}$ как функцию x, y, z и r, что $Y_1^{\pm 1} = \mp(\frac{3}{4\pi})^{1/2} \frac{x \pm iy}{\sqrt{2}r}$, $Y_1^0 = (\frac{3}{4\pi})^{1/2} \frac{z}{r}$.

б) Используя полученный в п. а) результат, показать, что $P(l_z = 0) = 2/3$,
$P(l_z = \hbar) = 1/6$, $P(l_z = -\hbar) = 1/6$.

6.2.10. Используя метод ВКБ, нарисовать графики угловых зависимостей $\rho(\theta)$ плотности вероятности для частицы в состояниях с азимутальным квантовым числом $l = 100$ и магнитными квантовыми числами $m = 0$, 50 и 100.

6.3. Сложение моментов

6.3.1. Найти среднее значение оператора $\hat{\mu} = g_1\hat{J}_1 + g_2\hat{J}_2$ в состоянии, характеризуемом квантовыми числами J, M_J, J_1, J_2, если полный момент $\hat{J}$ равен $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$.

6.3.2. Энергия взаимодействия двух атомов с $J_1 = 1$, $J_2 = 2$ задана выражением $\hat{H} = \frac{1}{2}\varepsilon\hat{J}_1\hat{J}_2$, $\varepsilon > 0$.

Найти энергетические уровни данной системы и степень их вырождения.

6.3.3. Модельный гамильтониан для спин-орбитального взаимодействия выглядит следующим образом:

$$\hat{H} = V(r) \cdot \hat{\vec{l}} \cdot \hat{\vec{s}} / \hbar^2$$

.

Считая, что электрон находится в состоянии с орбитальным моментом $l = 1$ найти матричные элементы данного гамильтониана и его собственные значения.

6.3.4. **(обязательная)** Имеются две слабо взаимодействующие подсистемы 1 и 2, состояния которых характеризуются квантовыми числами полного момента и его проекции на ось $z\,(l_1, m_1)$ и (l_2, m_2), соответственно. Указать возможные значения полного момента $\hat{l}$ совокупной системы (1+2) и вычислить среднее значение $\left\langle \hat{l}^2 \right\rangle$ в рассматриваемом состоянии.

6.3.5. **(обязательная)** При условиях задачи 6.3.4 вычислить вероятности различных возможных значений $\hat{l}$ для частного случая $l_2 = 1/2$.

6.3.6. Электронный угловой момент дейтрона равен $\hat{j} = \hat{l} + \hat{s}$, где $\hat{l}$ – орбитальный момент электрона, а $\hat{s}$ – его спин. Полный угловой момент дейтрона $\hat{f} = \hat{j} + \hat{i}$, где $\hat{i}$ – ядерный спин. Собственные значения операторов $\hat{j}^2$ и $\hat{f}^2$ равны, соответственно, $j(j+1)\hbar^2$ и $f(f+1)\hbar^2$.

а) Каковы возможные значения *j* и *f* для дейтрона в основном (1*s*, *l* = 0) состоянии?

б) Каковы возможные значения *j* и *f* для дейтрона в возбужденном (2*p*, *l* = 1) состоянии?

6.3.7. Построить волновые функции всех возможных состояний системы двух бесспиновых частиц, в которой имеют определенные значения: суммарный момент J и его проекция M на ось z, орбитальные моменты частиц l_1 и l_2, причем $l_1 = l_2 = 1$. Найти вероятности различных значений проекций моментов импульса каждой частицы на ось z и средние значения проекций в рассматриваемых состояниях.

6.4. Спин ½

6.4.1. **(обязательная)** Наиболее общий вид спиновой функции частицы со спином 1/2 в $\hat{s}_z$ - представлении есть

$$\psi = e^{i\alpha} \cos\beta \left|+\right\rangle + e^{-i\gamma} \sin\beta \left|-\right\rangle .$$

Найти сферические координаты φ, ϑ такого направления в пространстве, проекция спина на которое с достоверностью есть +1/2. Такое направление называют направлением поляризации частицы со спином 1/2.

6.4.2. Проекция спина электрона на ось z с достоверностью равна $1/2$. Какова вероятность того, что проекция спина на ось z', составляющую угол θ с осью z, равна $-1/2$?

6.4.3. Показать, что в системе из двух частиц, обладающих спином 1/2, в случае гамильтониана, симметричного относительно спинов, величина суммарного спина $\hat{S}$ представляет собой интеграл движения.

6.4.4. Рассмотрим систему из трех частиц со спином 1/2, расположенных в углах правильного треугольника, взаимодействие между которыми описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = J(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 + \hat{s}_2 \cdot \hat{s}_3 + \hat{s}_3 \cdot \hat{s}_1),$$

где $J > 0$.

а) Показать, что гамильтониан можно переписать с использованием оператора квадрата полного спина системы $\hat{S}^2$.

б) Каково основное состояние для данной системы и степень его вырождения?

6.4.5. **(обязательная)** Рассмотрите систему из четырех частиц со спином 1/2, расположенных в углах квадрата, взаимодействие между которыми задается гамильтонианом

$$\hat{H} = J(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 + \hat{s}_2 \cdot \hat{s}_3 + \hat{s}_3 \cdot \hat{s}_4 + \hat{s}_4 \cdot \hat{s}_1).$$

Каково основное состояние для данной системы и степень его вырождения?

6.4.6. Пусть $\hat{\vec{s}}_1$ и $\hat{\vec{s}}_2$ – операторы спинов двух частиц со спином 1/2:

$$\hat{\vec{s}}_1 = \frac{\hbar}{2}\hat{\vec{\sigma}}_1, \ \hat{\vec{s}}_2 = \frac{\hbar}{2}\hat{\vec{\sigma}}_2.$$

Выразить оператор $\hat{S}_{12} = \hat{\vec{\sigma}}_1 \hat{\vec{\sigma}}_2$ через операторы квадрата суммарного спина двух частиц $\hat{\vec{S}}^2$ и проекции суммарного спина $\hat{S}_z$ и найти его спектр.

6.4.7. **(обязательная)** Как было показано ранее (см. Лекцию 5, п. 3., EX1), любая функция от матриц Паули выражается через линейную. Показать, что оператор $\hat{S}_{12}{}^n$ выражается линейно через оператор $\hat{S}_{12}$. Выразить операторы $\hat{S}_{12}{}^2$ и $\hat{S}_{12}{}^3$ через $\hat{S}_{12}$.

6.4.8. Оператор $\hat{T}_{12}$, действующий на спиновые функции двух частиц, определен соотношением

$$\hat{T}_{12} = 3(\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \vec{n})(\hat{\vec{\sigma}}_2 \cdot \vec{n}) - (\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{\sigma}}_2),$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор $\vec{n} = \vec{r}_{12} / r$. Выразить оператор $\hat{T}_{12}^{\,2}$ через первые степени операторов $\hat{T}_{12}$, $\hat{S}_{12}$.

6.4.9. **(обязательная)** Рассмотреть действие оператора $\hat{T}_{12}$, определенного в предыдущей задаче, на спиновые собственные функции двухчастичной системы.

6.4.10. Система состоит из двух различных частиц со спинами 1/2. Спин-спиновое взаимодействие частиц определяется выражением $J\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2$, где J – константа. К системе приложено внешнее магнитное поле $\vec{H}$. Магнитные моменты частиц равны $\alpha\hat{\sigma}_1$ и $\beta\hat{\sigma}_2$. Найти собственные значения энергии этой системы.

6.4.11. В эксперименте по измерению интерференции нейтронов монохроматический пучок нейтронов (λ = 1.445 Å) разделяется в точке А на две части, которые затем интерферируют в точке D (см. рисунок ниже).

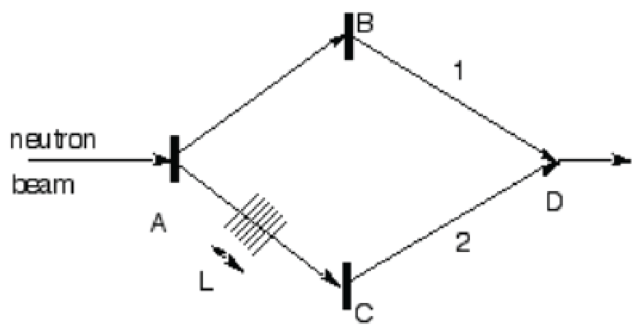

Figure 9.1: Neutron Interferometer Setup

Один из пучков проходит через область с поперечным магнитным полем $\vec{B}$ (направление указано на рисунке) на протяжении участка длиной L. Оба плеча интерферометра (A-B-D и A-C-D) идентичны за исключением наличия во втором случае области с магнитным полем.

В области с магнитным полем $\vec{B}$ уравнение Шредингера для нейтрона выглядит следующим образом:

$$(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu\vec{\sigma}\cdot\vec{B})\psi = E\psi \,.$$

а) Найти выражение для зависимости интенсивности отсчетов детектора в точке D от $\vec{B}$, Lи длины волны нейтрона λдля случаев поляризации праллельно и антипаралельно направлению магнитного поля.

б) Показать, что величина изменения магнитного поля, приводящая к появлению двух максимумов, определяется выражением

$$\Delta B = \frac{8\pi^2 \hbar c}{|e| g_n \lambda L} ,$$

где g_n (= -1.91) – магнитный момент нейтрона в единицах $-\frac{e\hbar}{2m_n c}$.