Квантовая теория
Второй поток. Весна 2014
Список задач №5
Тема: Квазиклассическая волновая функция.
Квантование Бора-Зоммерфельда.
Одномерная задача рассеяния: коэффициент прохождения.

1. Квазиклассическая волновая функция

5.1.1 **(Обязательная)** Без использования правила квантования Бора-Зоммерфельда получить правило квантования энергетических уровней и найти соответствующие им квазиклассические волновые функции в случае потенциала вида, приведенного на рис.1.

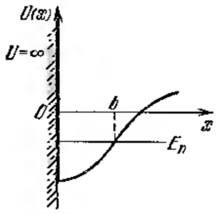

Рис. 1: К задаче 5.1.1.

5.1.2 Нарисовать график действительной части волновой функции частицы, падающей слева в потенциале, имеющем вид, показанный на рисунке:

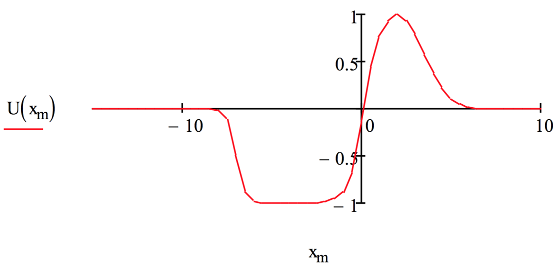

Рис. 2: К задаче 5.1.2.

Потенциал считать умеренно квазиклассическим ($B \simeq 10$). Энергия частицы $E = 0.8U_0$ несколько меньше максимума потенциала.

5.1.3 Пусть для стационарных состояний частицы, находящейся в одномерном потенциале $U(x)$ и подчиняющейся стационарному уравнению Шредингера:

$$\psi'' + k^2(x)\psi = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(x)],$$

метод ВКБ дает (в классически доступной области) следующее выражение для волновой функции:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \cos\left(\int\limits_{x_L}^{x} k(y)dy - \frac{\pi}{4}\right).$$

(здесь x_L – левая точка поворота). Найти вид потенциала $V(x)$, для которого это выражение будет являться точным решением уравнения Шредингера, и исследовать поведение $V(x)$ вблизи точки поворота.

2. Квантование Бора-Зоммерфельда

5.2.1 Получить квазиклассическое выражение для уровней энергии частицы в однородном поле тяжести в случае, когда ее движение ограничено снизу идеально отражающей плоскостью. Указать условие применимости полученного результата.

5.2.2 **(Обязательная)** Для частицы, находящейся в степенном потенциале $U(x) = A|x|^\alpha$, зависимость уровней энергии от n имеет вид $E_n \propto n^\nu$. Методом ВКБ найти зависимость показателя ν от α.

5.2.3 Для гауссовой потенциальной ямы:

$$U(x) = -U_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

вычислить методом ВКБ (с тремя десятичными знаками) относительные энергии связи $\varepsilon_i = E_i/|U_0|$ основного ($i = 0$) и и первого возбужденного ($i = 1$) состояний при значении борновского параметра B=3. Сравнить с точными (найденными численно) значениями.

5.2.4 Найти в квазиклассическом приближении плотность состояний дискретного спектра частицы, находящейся в одномерной потенциальной яме с одним минимумом у потенциальной энергии.

5.2.5 Используя квазиклассическое приближение, найти значения параметров потенциала:

$$U(x) = -\frac{U_0 a^4}{(x^2 + a^2)^2},$$

отвечающих появлению новых состояний дискретного спектра при углублении ямы. Указать условия применимости результата.

5.2.6 Определить в квазиклассическом приближении среднее значение кинетической энергии $\langle T \rangle$ стационарного состояния при известных выражениях для энергетических уровней E_n. Получить выражение $\langle T \rangle$ для гармонического осциллятора.

3. Одномерная задача рассеяния: коэффициент прохождения

5.3.1 Если атом помещен в однородное постоянное электрическое поле с напряженностью E, то существует вероятность того, что электрон протуннелирует через потенциальный барьер и уйдет от ядра в сторону анода: атом в результате ионизуется. Этот процесс называется автоионизацией. Оценить величину напряженности поля, при которой скорость автоионизации атома водорода в состоянии с главным квантовым числом $n = 2$ равна скорости радиационного перехода с него на уровень с $n = 1$.

5.3.2 **(Обязательная)** Энергии альфа-частиц при альфа-распаде ядер тяжелых атомов определяются дефектом соответствующих масс. Энергии альфа-частиц при распаде тория ^{232}Th, радия ^{226}Ra и изотопа полония ^{212}Po составляют, соответственно, 4.01, 4.78 и 8.78 МэВ . Оценить периоды полураспада тория и полония, если период полураспада радия $T = 1602$ года.

Указание. Потенциал, в котором движется альфа-частица, можно рассматривать в виде:

$$W(r) = \begin{cases} 0, & r < r_0, \\ U(r), & r > r_0, \end{cases}$$

где $r = 1.25 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ см – радиус ядра (радиус действия сильных взаимодействий), а $U(r)$ – кулоновская энергия взаимодействия вылетающей альфа-частицы с оставшимся ядром.

5.3.3 Оценить в квазиклассическом приближении коэффициент прохождения барьера вида:

$$U(r) = \begin{cases} 0, \quad r < 0, \\ U_0(1 - x/a), \quad r > r_0. \end{cases}$$

Какова точность полученного результата?

5.3.4 Оценить в квазиклассическом приближении коэффициент прохождения барьера вида:

$$U(r) = \begin{cases} 0, \quad r < 0, \\ U_0 \exp\left(-x/a\right), \quad r > r_0. \end{cases}$$

5.3.5 Оценить в квазиклассическом приближении коэффициент прохождения барьера вида:

$$U(r) = \frac{U_0}{\operatorname{ch}^2(x/a)}.$$

Определить условия применимости полученного выражения.

5.3.6 Оценить в квазиклассическом приближении коэффициент прохождения барьера вида:

$$U(r) = \frac{U_0 a^2}{x^2 + a^2}$$

при достаточно малой энергии частиц.

5.3.7 Вычислить коэффициент прохождения $T(E)$ в поле прямоугольного барьера:

$$U(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0, \quad x > a, \\ U_0 > 0, \quad 0 < x < a. \end{cases}$$

Сравнить с результатом точного расчета и указать условия малости ошибки приближения.

5.3.8 Вычислить коэффициент прохождения в поле параболического барьера:

$$U(x) = -\frac{m\omega^2}{2} x^2$$

при $E < 0$.

5.3.9 Из экспериментальных данных по периодам полураспада изотопов урана с различными энергиями альфа-частиц:

	A	E (МэВ)	T
1	238	4.20	$4.51 \cdot 10^9$ лет
2	232	5.32	72 года
3	227	6.8	1.3 мин

найти радиус ядра урана R_0.