Квантовая теория
Второй поток. Весна 2014
Список задач №3
Тема: Основные уравнения. Координатное и импульсное представления. Соотношения неопределенностей. Динамика в картине Гейзенберга. Динамика в картине Шредингера

1. Координатное и импульсное представления

3.1.1 Доказать, что если для функции $\psi(x)$ из класса $\mathbb{L}_2$ мнимая часть пропорциональна вещественной: $\mathrm{Im}(\psi(x)) = \mathrm{const} \times \mathrm{Re}(\psi(x))$, то среднее значение оператора импульса $\hat{p}$ в таком состоянии равно нулю.

3.1.2 **(Обязательная задача)** Доказать, что унитарный оператор сдвига начала отсчета координаты и импульса $\hat{x} \to \hat{x} + \hat{x_0}$ и $\hat{p} \to \hat{p} + \hat{p_0}$ имеет вид

$$\hat{U}(x_0, p_0) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_0\hat{x} - x_0\hat{p}) + i\varphi\right].$$

3.1.3 Вычислить $[\hat{x}, \hat{U}(x_0, 0)]$ для оператора $\hat{U}(x_0, p_0)$ из задачи 3.1.2

3.1.4 Как меняется среднее значение координаты $\langle\hat{x}\rangle$ под действием оператора сдвига начала отсчета $\hat{U}(x_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}x_0\hat{p}\right]$?

3.1.5 **(Обязательная задача)** Свободная частица находится в состоянии

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{w}} \exp\left[ikx - \frac{x^2}{2w^2}\right],$$

найти среднее значение и дисперсию энергии частицы.

3.1.6 Низковольтная электронная пушка ELG-2A, выпускаемая компанией Kimball Physics (http://www.kimballphysics.com/), обладает минимальной шириной энергетического распределения пучка $\Delta E = 0.3$ эВ (см. табл.). Считая среднюю энергию электронов равной

BEAM ENERGY	1 eV to 2 keV (Independently adjustable)
BEAM CURRENT	Standard: 1 nA to 10 μA (Independently adjustable)
ENERGY SPREAD	Approx. cathode thermal spread, calculated Ta - 0.5eV Y_2O_3 - 0.4eV BaO - 0.3eV

$\overline{E} = 1$ кэВ (середина рабочего диапазона - см. табл.) и считая, что ширина энергетического распределения ΔE целиком связана с ограниченностью продольного размера волнового пакета электрона, оценить его наибольшую длину L.

2. Соотношения неопределенностей

3.2.1 Волновая функция свободной частицы в координатном представлении имеет вид

$$\psi(x) = A\frac{1}{\mathrm{ch}\alpha x.} \quad (1)$$

Вычислить нормировочный коэффициент и найти произведение неопределенностей $\Delta x \Delta p$ в этом состоянии.

3.2.2 Свободная частица в начальный момент времени находится в состоянии

$$\psi(x, t=0) = A \exp\left[\frac{i}{\hbar} p_0 x - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right]$$

с минимально возможным значением произведения неопределенностей $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$. Найдите зависимость $\Delta x(t) \Delta p(t)$.

3. Динамика в картине Гейзенберга

3.3.1 Гамильтониан системы с тремя состояниями в своем собственном представлении имеет вид

$$\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решив уравнения Гейзенберга, найти закон движения произвольного эрмитова оператора

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} p & a & b \\ a^* & q & c \\ b^* & c^* & r \end{pmatrix}.$$

3.3.2 **(Обязательная задача)** В момент времени $t = 0$ свободная частица находится в состоянии с волновой функцией

$$\psi(x, t=0) = A \exp\left[\frac{i}{\hbar} p_0 x - \frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Найти временную зависимость средних значений $\langle \hat{x}(t) \rangle$, $\langle \hat{p}(t) \rangle$, $\langle \Delta\hat{x}(t)^2 \rangle$, $\langle \Delta\hat{p}(t)^2 \rangle$.

3.3.3 **(Обязательная задача)** В момент времени $t = 0$ частица в потенциале гармонического осциллятора находится в состоянии с волновой функцией

$$\psi(x, t=0) = A \exp\left[\frac{i}{\hbar} p_0 x - \frac{(x-q_0)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Найти временную зависимость средних значений $\langle \hat{x}(t) \rangle$, $\langle \hat{p}(t) \rangle$, $\langle (\Delta\hat{x}(t))^2 \rangle$, $\langle (\Delta\hat{p}(t))^2 \rangle$.

3.3.4 **(Обязательная задача)** Частица совершает одномерное движение в потенциале параболического барьера: $U(x) = -\frac{m\omega^2 x^2}{2}$. В начальный момент времени состояние частицы описывается волновой функцией

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{w}} \exp\left[ikx - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Исследовать поведение среднего значения координаты $\langle x(t) \rangle$ в зависимости от средней энергии частицы $\langle E \rangle$ и параметров a, k и σ.

3.3.5 Вычислить значение разновременного коммутатора $[\hat{p}(t), \hat{x}(t')]$ для
а. свободной частицы;
б. гармонического осциллятора.

3.3.6 Показать, что для одномерного движения свободной частицы с массой m выполняется соотношение неопределенностей

$$\langle (\Delta x(t))^2 \rangle \langle (\Delta x(0))^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}$$

3.3.7 Для одномерного гармонического осциллятора в основном состоянии вычислить *корреляционную функцию* $C(t) = \langle \hat{x}(t)\hat{x}(0)\rangle$, где $\hat{x}(t)$ - оператор координаты в картине Гейзенберга.

3.3.8 Для системы с гамильтонианом $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + U(\mathbf{r})$ вычислить сумму

$$B_2 = \sum_k |x_{nk}|^2\, \omega_{kn}^4,$$

где $|n\rangle$ – стационарное состояние дискретного спектра, индекс k нумерует все стационарные состояния, $\hat{x}$ – оператор координаты, ω_{kn} – частота перехода.

3.3.9 Для системы с гамильтонианом $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + U(\mathbf{r})$ вычислить сумму

$$A_2 = \sum_k |x_{nk}|^2\, \omega_{kn}^5,$$

где $|n\rangle$ – стационарное состояние дискретного спектра, индекс k нумерует все стационарные состояния, $\hat{x}$ – оператор координаты, ω_{kn} – частота перехода.

4. Динамика в картине Шредингера

3.4.1 **(Обязательная задача)** Частица находится в ящике, разделенном барьером на две части. Обозначим состояние, в котором частица с достоверностью находится в левой (правой) части ящика, $|L\rangle$ ($|R\rangle$). «Туннелирование» частицы через барьер описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \Delta\left(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|\right).$$

Пусть в начальный момент частица находится в левой части ящика, как зависит от времени вероятность обнаружить ее в правой части? Как будет эволюционировать во времени состояние, имеющее в начальный момент времени вид $|\psi(t=0)\rangle = \alpha\,|L\rangle + \beta\,|R\rangle$?

3.4.2 **(Обязательная задача)** Двухуровневая система с гамильтонианом $\hat{H} = \hbar\omega\hat{\sigma}_2$, где $\hat{\sigma}_2$ - матрица Паули, в начальный момент времени находится в состоянии $|0\rangle = (1 \quad 0)^T$ Вычислите зависимости от времени неопределенностей $\langle\Delta\hat{\sigma}_1\rangle$ и $\langle\Delta\hat{\sigma}_3\rangle$.

3.4.3 Гамильтониан двухуровневой системы в самом общем случае имеет вид

$$\hat{H} = \hat{V}\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}\hat{V}^\dagger,$$

где $\hat{V}$ - унитарная матрица вида

$$\hat{V} = e^{i\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta e^{i\varphi} & -\sin\theta e^{i\eta} \\ \sin\theta e^{-i\eta} & \cos\theta e^{-i\varphi} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Покажите, что *вероятности перехода* $P_{0\to1}(t) = |\langle 1|\, e^{-i\hat{H}t/\hbar}\,|0\rangle|^2$ и $P_{1\to0}(t) = |\langle 0|\, e^{-i\hat{H}t/\hbar}\,|1\rangle|^2$ одинаковы для любого момента времени t.

3.4.4 Найти *временну́ю функцию Грина* $G(x,t;x',t')$ для свободной частицы. Эта функция удовлетворяет уравнению Шредингера по переменным x, t и начальному условию $G(x,t,x',t') = \delta(x - x')$.

3.4.5 Гармонический осциллятор находится при $t = 0$ в состоянии с волновой функцией

$$\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_1(x) + i\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi_2(x),$$

где $\varphi_n(x)$ – волновые функции n-го стационарного состояния. Вычислить $\langle x(t) \rangle$.

3.4.6 Для большого волнового пакета

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k \left|\psi_k\right\rangle e^{-i\omega_k t}, \tag{2}$$

где a_k - случайные амплитуды, удовлетворяющие условию нормировки, а ω_k - случайные частоты, равномерно распределенные на интервале от 0 до Ω, исследовать динамику распада фиделити начального и текущего состояний,

$$\mathfrak{F}(t) = |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2.$$