

---

---

## Квантовая теория

Второй поток. Весна 2014

### Список задач №1

**Тема: Основные масштабы. Масштаб действия в квантовой теории. Оценки с помощью соотношения неопределенностей.**

---

---

#### 1.1. Основные масштабы

1.1.1. Оценить характерные масштабы в атомной системе единиц:

- длины;
- скорости;
- энергии;
- частоты;
- напряженности электрического поля.

Сравнить с характерным межатомным расстоянием, скоростью света, энергией выхода металлов, оптической частотой и напряженностью поля в лазерном излучении. Оценки производить в системе СГС.

*Ответы см. в файле «Справка 2».*

1.1.2. 1). Оценить характерный масштаб ускорения в атомной системе единиц. Сравнить с ускорением свободного падения.

2). Оценить характерный масштаб давления в атомной системе единиц. Сравнить с атмосферным давлением.

3). Оценить характерный масштаб силы в атомной системе единиц.

1.1.3. Найти длину световой волны, излучаемой электроном, вращающимся вокруг протона по орбите с радиусом  $a_0$ .

1.1.4. Эффект Комптона: для рассеяния фотона видимого диапазона на свободном электроне оценить изменение длины волны фотона и скорости электрона.

1.1.5. Оценить «классический радиус электрона» - радиус шарика, имеющего заряд электрона, собственная кулоновская энергия которого равна массе покоя электрона.

1.1.6. Оценить характерный масштаб частоты колебаний атомов в молекуле кислорода.

1.1.7. Оценить долю квантов в солнечном излучении, энергии которых достаточно для ионизации атома гелия (энергия ионизации  $E_i = 24.47 \text{ эВ}$ ).

1.1.8. Используя в качестве основных масштабов постоянную Планка, массу протона и размер ядра  $R = 1.25 * 10^{-13} \text{ А}^{1/3} \text{ см}$ , оценить характерный масштаб энергии ядерных процессов.

1.1.9. Какая комбинация фундаментальных констант задает квантовый масштаб электрического сопротивления?

1.1.10. Оценить скорость движения электронов в атомах тяжелых элементов и радиус орбиты электрона.

## 1.2 Масштаб действия в квантовой теории

1.2.1. Оценить масштаб действия и сравнить с  $\hbar$  для:

- 1) математического маятника ( $l = 10 \text{ см}$ ,  $m = 1 \text{ г}$ );
- 2) процесса разрядки конденсатора, заряженного зарядом  $q = 100e$ , через сопротивление  $R = 10 \text{ Ом}$ .
- 3) солнечного света;

1.2.2. Оценить масштабы действия для электронных процессов в современных процессорах.

1.2.3. Оценить масштаб действия для движения электрона с энергией  $E = 1 \text{ эВ}$  в магнитном поле неодимового магнита ( $B \sim 10^4 \text{ зс}$ ). *Указание:* не запутаться в единицах измерения.

1.2.4. Оценить температуру  $T$ , при которой задача о колебаниях кристаллической решетки твердого тела станет ультраквантовой ( $\hbar/S \gg 1$ ).

1.2.5. Оценить температуру воздуха (при атмосферном давлении), при которой в движении молекул начинают играть существенную роль квантовые эффекты.

1.2.6. Оценить размер падающей градины, для которой могли бы стать существенными квантовые эффекты.

1.2.7. В *электронной системе* единиц основными масштабами служат электрический заряд электрона  $e$ , его масса  $m$  и скорость света  $c$ . Наиболее известным является масштаб длины этой системы  $r_0 = e^2/mc^2$ , называемый *классическим радиусом электрона*. Найти масштаб действия  $S$  в *электронной системе* и сравнить его с постоянной Планка  $\hbar$ .

1.2.8. Оценить масштаб действия для атомного ядра.

*Решение.*

Масштабом длины возьмем радиус ядра, который определяется формулой  $R = 1.25 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ см}$ , где  $A$  – атомное число (количество нуклонов в ядре) [М67, с.24]. В качестве масштаба энергии возьмем величину – типичную энергию связи нуклона в ядре [М67, с.14]:  $E = 8 \text{ МэВ} = 1.28 \cdot 10^{-5} \text{ эрг}$ . В качестве масштаба массы возьмем массу нуклона (протона)  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ .

Из этих величин однозначно строится масштаб с размерностью действия:  $S = \sqrt{m_p E R^2}$ .

Для ядра атома железа ( $A = 56$ )  $S = 2.21 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с} = 2.1 \hbar$ . Этот масштаб действия близок к постоянной Планка. Таким образом, атомное ядро является существенно квантовой системой.

*Литература*

М67 Маляров В.В. Основы теории атомного ядра. М.: Наука – Физматгиз, 1967.

1.2.9. Размерности углового момента и действия совпадают. Оценить в единицах  $\hbar$  характерную величину углового момента  $L$  молекул кислорода в воздухе при комнатной температуре.

### 1.3. Оценки с помощью соотношения неопределенностей

1.3.1. С помощью соотношения неопределенностей оценить минимальную энергию гармонического осциллятора.

1.3.2. С помощью соотношения неопределенностей оценить энергию ионизации атома гелия.

*Решение.*

Считая, что два электрона в атоме гелия находятся в областях размерами  $r_1$  и  $r_2$ , и при этом стремятся находиться в противоположных направлениях от ядра, можно записать энергию системы в виде  $E = -2e^2/r_1 - 2e^2/r_2 + e^2/(r_1 + r_2) + p_1^2/2m + p_2^2/2m$ . Из соображений симметрии можно сразу принять  $r_1 = r_2 = r$ , тогда  $p_1 = p_2 \sim \hbar/r$ , и энергия  $E = -7e^2/2r + \hbar^2/mr^2$ . Минимуму энергии соответствует  $r = 4\hbar^2/7me^2$ , энергия при этом  $E_{\text{He}} = -49me^4/16\hbar^2 \approx -83.3 \text{ эВ}$ .

В то же время энергия иона гелия  $\text{He}^+$   $E = -2e^2/r + p^2/2m$ . Снова  $p \sim \hbar/r$ , и минимуму энергии соответствует  $r = a_0 = \hbar^2/2me^2$ , а сама энергия  $E_{\text{He}^+} = 2E_0 = -54.4 \text{ эВ}$ . Энергия ионизации  $E_i = E_{\text{He}^+} - E_{\text{He}} \approx 28.9 \text{ эВ}$ . Это не очень далеко от экспериментального значения энергии ионизации атома гелия  $E_{\text{exp}} = 24.47 \text{ эВ}$ .

1.3.3. Оценить минимальную глубину прямоугольной потенциальной ямы ширины  $d = 1 \text{ нм}$ , при которой электрон может находиться в ней, не выпрыгивая и даже не высовываясь.

1.3.4. Найти температуру, при которой скорости теплового движения атомов в кристаллической решетке становятся порядка их квантовой неопределенности.

1.3.5. Масса нейтрона известна с точностью до 8-го знака после запятой:  $m_n = (1.674\ 927\ 351 \pm 0.000\ 000\ 074) * 10^{-24} \text{ г}$ . Учитывая, что период полураспада нейтрона  $\tau \sim 611 \text{ с}$ , определить, насколько в принципе возможно улучшить точность измерения этой константы.

1.3.6. С помощью соотношения неопределенностей оценить скорость движения нуклонов в атомном ядре.

1.3.7. С помощью соотношения неопределенностей и принципа Паули оценить наименьшую энергию нейтрального атома с  $Z$  электронами.

1.3.8. Оценить размер области локализации ядра атома углерода в кристаллической решетке алмаза при нулевой температуре.

**EOF**