Задачи по курсу «Введение в квантовую физику»

1. Формула Планка, атомная система единиц.

1.1. Оценить характерные масштабы длины, скорости, энергии и частоты в атомной системе единиц. *Указание:* составить величины соответствующих размерностей из универсальных констант $\hbar$, e, m_e. Оценку производить в системе СГС.

1.2. Из соображений размерности определить выражение для мощности излучения заряда, движущегося с ускорением. *Указание:* мощность излучения должна зависеть от четных степеней заряда и его ускорения.

1.3. Оценить среднее время жизни атома в возбужденном состоянии.

1.4. Из соображений размерности оценить постоянную Стефана-Больцмана.

1.5. Оценить давление света лазерной указки. *Решение:* мощность лазерной указки $I \sim 1 мВт$, ширина пучка $d \sim 1 мм$. Давление пучка света определяется произведением числа фотонов на импульс одного фотона, деленное на площадь сечения пучка $p \sim \frac{I}{\hbar\omega}\frac{\hbar\omega}{c}\frac{4}{\pi d^2} \approx \frac{I}{cd^2} \approx 3*10^{-6}\,Па$

2. Соотношения неопределенности.

2.1. Оценить размер атома водорода. *Указание:* найти минимум энергии атома, складывающейся из кинетической энергии электрона и кулоновской энергии взаимодействия электрона с протоном.

2.2. Оценить минимальной размер области, в которой можно локализовать электрон. *Указание:* оценить неопределенность координаты электрона, при которой его кинетическая энергия становится по порядку величины равной его энергии покоя. Дальнейший рост энергии электрона невозможен, потому что приведет к рождению электрон-позитронной пары. *Ответ:* комптоновская длина волны электрона.

2.3. Оценить минимальную энергию гармонического осциллятора.

2.4. Считая волновую функцию частицы вне прямоугольной потенциальной ямы пренебрежимо малой, оценить минимальную глубину такой ямы ширины d, при которой частица может находиться в ней, не выскакивая. *Решение:* неопределенность координаты частицы в яме не может быть больше ширины ямы d. Чтобы частица не выскакивала из ямы, ее глубина должна быть не меньше, чем кинетическая энергия частицы $U_{min} \sim E_k = \hbar^2 / 2md^2$.

2.5. Найти температуру, при которой скорости теплового движения атомов в кристаллической решетке становятся порядка их квантовой неопределенности.

3. Операторная алгебра.

3.1. Найти коммутатор операторов $\hat{x}$ и $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$.

3.2. Пусть $\left[\hat{a}\hat{b}\right] = 1$. Найти $\left[\hat{a}^2\hat{b}^2\right]$.

3.3. Доказать тождество Якоби $\left[\hat{a}\left[\hat{b}\hat{c}\right]\right] + \left[\hat{b}\left[\hat{c}\hat{a}\right]\right] + \left[\hat{c}\left[\hat{a}\hat{b}\right]\right] = 0$.

3.4. Найти коммутаторы матриц Паули $\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$; $\sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}$; $\sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$.

3.5 Найти собственные функции (СФ) и собственные значения (СЗ) эрмитова оператора $\hat{L} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\hat{L} = \hat{L}^+$.

3.5. Найти СФ оператора импульса $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$.

3.7. Найти СЗ оператора проекции $P_A = |A\rangle\langle A|$. *Указание:* оператор удовлетворяет уравнению $\hat{P}_A^2 = \hat{P}_A$.

3.8. Найти СЗ оператора инверсии $\sigma|\psi(x)\rangle = |\psi(-x)\rangle$.

3.9. Найти явный вид СФ оператора уничтожения.

4. Стационарное уравнение Шредингера (УШ). Одномерное движение.

4.1. Найти решение УШ для свободного движения частицы $U(x) = 0$. Показать, что найденная волновая функция является также СФ оператора импульса.

4.2. Найти коэффициент отражения частицы от потенциальной стенки $U(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ U_0 > 0, \ x > 0 \end{cases}$.

4.3. Найти вероятность прохождения частицы через прямоугольный потенциальный барьер $U(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \ x > d \\ U_0 > 0, \ 0 < x < d \end{cases}$.

4.4. Найти дискретный спектр уровней энергии частицы в прямоугольной потенциальной яме $U(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \ x > d \\ -U_0 < 0, \ 0 < x < d \end{cases}$. Исследовать полученное решение в предельных случаях $U_0 d^2 \to 0$ и $mU_0 d^2 \gg \hbar^2$. Объяснить причину отличия полученного решения от результата задачи 2.4.

4.5. Найти дискретный спектр энергии частицы в асимметричной яме $U(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ -U_0, \ 0 < x < d \\ +\infty, \ x > d \end{cases}$

4.6. Определить положение уровня энергии частицы в дельта-яме $U(x) = -W\delta(x)$.

4.7. Найти дискретный спектр энергии частицы в двойной дельта-яме $U(x) = -W(\delta(x) + \delta(x-d))$.

4.8. Определить коэффициент прохождения частицы через последовательность большого числа периодически расположенных дельта-барьеров $U(x) = W\sum_n \delta(x - nd)$.

5. Оператор момента. Движение в центральном поле.

5.1. Для момента $L = 1$ найти матричный вид операторов $\hat{m}_x$, $\hat{m}_y$ и $\hat{m}_z$. *Указание:* если выбрать в качестве базиса СФ оператора $\hat{m}_z$, то недиагональные члены его матрицы будут равны нулю, а диагональные – его СЗ. Матрицы двух других операторов следует искать исходя из коммутационных соотношений.

5.2. Найти энергетический спектр трехмерного гармонического осциллятора. Определить кратность вырождения каждого его уровня.

5.3. Определить дискретный спектр энергии при движении частицы с моментом $L = 0$ в сферической прямоугольной потенциальной яме $U(r) = \begin{cases} -U_0, \ r < d \\ 0, \ r > d \end{cases}$