

Семинар 11. Парадокс ЭПР. Неравенства Белла.

В 1927 году Альберт Эйнштейн выступил против вероятностной трактовки математической модели квантовой механики, принадлежащей Нильсу Бору и Максу Борну. Хорошо известна его фраза «*Бог не играет в кости*». В 1935 году Эйнштейн вместе с Подольским и Розеном написал статью, в которой более подробно аргументировал неполноту квантовой механики. Сформулированный в статье парадокс носит название *парадокса ЭПР*. В последовавшей за этим двадцатилетней дискуссии Эйнштейна и Бора выработалась общепринятая сегодня *копенгагенская интерпретация* квантовой механики.

В своей первоначальной трактовке парадокс ЭПР выглядел следующим образом: рассмотрим процесс, в котором некая частица распадается на две других. По закону о сохранении импульсов их импульсы жестко связаны. Измеряя импульс одной частицы, мы тем самым узнаем импульс другой частицы. Теперь измерив координату второй частицы, мы тем самым измерим одновременно и ее координату, и импульс, тогда как в рамках квантовой механики одновременно измерение некоммутирующих величин невозможно.

С точки зрения копенгагенской интерпретации парадокса просто нет – при измерении координаты второй частицы мы изменим ее состояние, и даже если ранее она находилась в состоянии с фиксированным импульсом – это состояние было нами безнадежно испорчено.

Проблема данной дискуссии заключается в том, что долгое время она лежала в области философских воззрений на теорию, никак не проявляющихся в эксперименте. В 1951 году Дэвидом Бомом был предложен вариант парадокса ЭПР, приближающий его к экспериментальной проверке. Вместо закона сохранения импульса было предложено использовать закон сохранения спина частиц, позволяющий создать систему двух коррелированных электронов с суммарным спином, равным нулю. Если обозначить состояние электрона со спином, направленным вверх, волновой функцией $|u\rangle$, а со спином, направленным вниз - $|d\rangle$, то волновая функция двух электронов будет иметь вид $|\psi\rangle = (|u,d\rangle - |d,u\rangle) / \sqrt{2}$. Особенность этой волновой функции в том, что ее нельзя записать как произведение волновых функций первого и второго электрона. Такие состояния называют «*перепутанными*».

В дальнейшем чаще рассматривался аналогичный эксперимент, в котором вместо электронов рассматривались одновременно испущенные фотоны с ортогональными поляризациями. Такие фотоны могут возникать в результате двухфотонного излучения или при спонтанном параметрическом рассеянии (в последнем случае пара коррелированных фотонов носит название бифотона). Волновая функция бифотона по-прежнему имеет вид $|\psi\rangle = (|V,H\rangle - |H,V\rangle) / \sqrt{2}$, где $|V\rangle$ - вертикально, а $|H\rangle$ - горизонтально поляризованный фотон, и не зависит от выбора базиса: если рассматривать поляризацию относительно оси, наклоненной на 45° , то волновая функция имеет вид $|\psi\rangle = (|+,-\rangle - |-,+\rangle) / \sqrt{2}$, где $|+\rangle$ - фотон с поляризацией под 45° , а $|-\rangle$ - ортогональный ему фотон с поляризацией под -45° .

Согласно постулатам квантовой механики при измерении поляризации одного фотона происходит редукция волновой функции, и второй фотон оказывается в состоянии с фиксированной поляризацией. Однако к моменту измерения фотоны может разделять большое расстояние, и согласно постулатам теории относительности второй фотон не мог мгновенно узнать о произошедшем с первым фотоном. С точки зрения Эйнштейна, это означает, что на самом деле состояние обоих фотонов было определено с самого начала, просто мы не знали, каким оно было. Другими словами, существует некий скрытый параметр, определяющий результаты измерения обоих фотонов. Таким образом, формулировка парадокса ЭПР в трактовке Боба предлагает в качестве альтернативы копенгагенской интерпретации *теорию*

скрытых параметров, утверждающую, что невозможность получить полную информацию о состоянии частицы – недостаток наших знаний о системе, а не принципиальное свойство природы.

Описанный эксперимент оставался умозрительным до 1964 года, когда Белл сформулировал **неравенства Белла**, которые всегда выполняются в рамках теории скрытых параметров, но нарушаются в квантовой механике. Для вывода неравенства Белла рассмотрим эксперимент, в котором производится измерение поляризации двух коррелированных фотонов. Каждый из фотонов попадает на поляризационное зеркало (в качестве которого обычно используют поляризационные призмы), которое пропускает фотоны, поляризация которых направлена вдоль оси зеркала, и отражает ортогонально поляризованные фотоны. Фотон с поляризацией, составляющей угол φ с осью зеркала, по закону Малюса проходит через него с вероятностью $\cos^2 \varphi$ и отражается с вероятностью $\sin^2 \varphi$. Детекторы (по два на каждое зеркало) регистрируют как прошедшие, так и отраженные фотоны. Пусть величина $A(\alpha)$ равна единице, если первый фотон прошел через зеркало, и минус единице, если отразился. Угол α определяет направление оси поляризационного зеркала. Аналогично, $B(\beta) = \pm 1$ определяет результат измерения второго фотона.

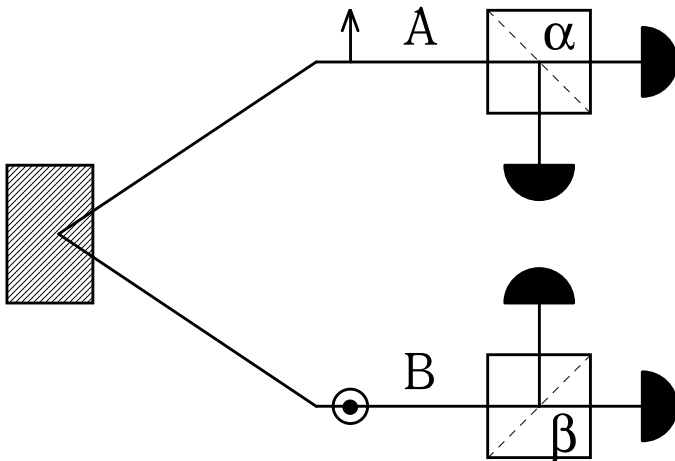


Рис.1. Схема эксперимента по измерению поляризаций двух фотонов

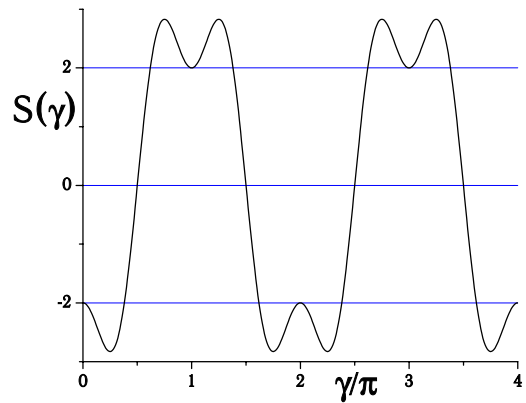


Рис.2. Поведение наблюдаемой Белла (см. ниже)

Очевидно, при измерении одного фотона величины A и B с одинаковой вероятностью $P(1) = P(-1) = 1/2$ принимают одно из двух значений, а результат их совместного измерения зависит от разности углов $\varphi = \alpha - \beta$. Поскольку фотоны имеют ортогональную поляризацию, то при $\varphi = \pi/2$ значения A и B полностью коррелируют, а при $\varphi = 0$ - антикоррелируют. Если сначала измеряется первый фотон, то с точки зрения квантовой механики в момент его измерения определяется поляризация второго фотона: если первый фотон прошел через зеркало, то поляризация второго фотона становится перпендикулярна оси α , а если первый отразился – то поляризация второго фотона параллельна этой оси. Далее вероятность прохождения или отражения второго фотона определяется по закону Малюса углом между поляризацией фотона $\alpha + \pi/2$ и углом β , определяющим ориентацию второго зеркала. Таким образом, среднее значение произведения величин A и B , называемое коэффициентом корреляции

$$E(\alpha, \beta) = \langle A(\alpha) B(\beta) \rangle = P_{++}(A, B) - P_{+-}(A, B) - P_{-+}(A, B) + P_{--}(A, B) =$$

$$= (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) / 2 = -\cos 2\varphi$$

Для вывода неравенства Белла запишем наблюдаемую Белла - комбинацию произведений A и B для разных значений углов α и β :

$$S(\alpha, \alpha', \beta, \beta') = A(\alpha)B(\beta) - A(\alpha')B(\beta) + A(\alpha)B(\beta') + A(\alpha')B(\beta') = \\ = B(\beta)[A(\alpha) - A(\alpha')] + B(\beta')[A(\alpha) + A(\alpha')]$$

Поскольку величина $A = \pm 1$, то одна из двух квадратных скобок всегда равна нулю, а другая двойке. Отсюда следует, что наблюдаемая Белла $S(\alpha, \alpha', \beta, \beta') = \pm 2$, а ее среднее значение удовлетворяет неравенству $|\langle S(\alpha, \alpha', \beta, \beta') \rangle| \leq 2$. Это неравенство – следствие теории скрытых параметров, потому что оно выведено в предположении о существовании совместной функции распределения вероятностей четырех измеряемых величин $P\{A(\alpha), A(\alpha'), B(\beta), B(\beta')\}$.

С другой стороны, среднее значение наблюдаемой Белла имеет вид комбинации коэффициентов корреляции $\langle S(\alpha, \alpha', \beta, \beta') \rangle = E(\alpha, \beta) - E(\alpha', \beta) + E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta')$, т.е. является функцией трех углов $\varphi = \alpha - \beta$, $\chi = \beta' - \alpha$ и $\theta = \alpha' - \beta'$ ($\alpha' - \beta = \theta + \chi + \varphi$):

$$\langle S(\alpha, \alpha', \beta, \beta') \rangle = \cos 2(\theta + \chi + \varphi) - \cos 2\varphi - \cos 2\chi - \cos 2\theta$$

Чтобы показать, что полученное выражение нарушает неравенство Белла, достаточно выбрать все три угла равными $2\varphi = 2\chi = 2\theta = \gamma$: $\langle S(\gamma) \rangle = \cos 3\gamma - 3\cos \gamma$. Экстремум функции достигается при $\sin 3\gamma = \sin \gamma$, максимумам и минимумам соответствуют значения $\gamma = \pi/4 + \pi n/2$, при которых $\langle S(\gamma) \rangle = \pm 2\sqrt{2}$.

Начиная с 1972 года нарушение неравенств Белла было неоднократно зарегистрировано в различных экспериментах. В справедливости квантовой механики и до этого не было особых сомнений, однако эксперименты по нарушению неравенств Белла показали, что любые попытки интерпретировать ее предсказания при помощи теории скрытых параметров заранее обречены. Для того чтобы в рамках классических представлений объяснить нарушение неравенств Белла, необходимо ввести одно из двух предположений: допустить возможность распространения сигнала от первой частицы ко второй со скоростью большей скорости света либо допустить, что функция распределения вероятностей может принимать отрицательные значения. С первым из предположений связано то, что квантовую механику иногда называют «нелокальной» теорией.

Экспериментальную проверку нарушений неравенств Белла можно считать финалом дискуссии Эйнштейна и Бора, подтвердившим адекватность копенгагенской интерпретации квантовой механики. Тем не менее, дискуссии об интерпретациях квантовой механики на этом не прекратились. Существует альтернативная копенгагенской **многомировая интерпретация** квантовой механики, введенная Эвереттом и Девигом. Ее преимуществом является возможность обойтись без постулата редукции – его место занимает предположение о множественности миров и о том, что в момент измерения мы производим выбор одного из них. Существуют также дальнейшие попытки объяснить нарушение неравенств Белла с классической точки зрения или обосновать несостоятельность экспериментов по их проверке. Однако следует понимать, что надежность предсказаний квантовой механики подтверждается многочисленными экспериментами и не зависит от того, как именно мы интерпретируем (т.е. объясняем словами) квантовомеханические формулы.