Лекция 9

Виды неклассического света и способы их получения (продолжение).
Неклассический свет с большим числом фотонов.
Сжатый свет. «Коты Шредингера».

Получение сжатого света с помощью параметрического преобразователя

Рассмотрим параметрическое взаимодействие в случае, когда возмущение велико (сильная накачка, или большая нелинейность, или длинный кристалл). Этот случай реализуется для импульсных лазеров или внутри резонатора.

При этом теория возмущений не работает, а представление Шредингера, вообще говоря, неудобно. Воспользуемся представлением Гейзенберга.

Одномодовое (квадратурное) сжатие.

Для начала рассмотрим вырожденный (одномодовый) случай – он приводит к квадратурному сжатию. Запишем уравнения Гамильтона:

$i\hbar(da/dt)=[a,V]= (i\hbar\Gamma/2)[a,(a^{+2}-a^2)]= i\hbar\Gamma a^+$.

$da/dt=\Gamma a^+$
$da^+/dt=\Gamma a$

На самом деле здесь производная не по времени, а по координате. Но в стационарном случае это одно и то же.

Введем квадратуры: $a=q+ip$, тогда $[q,p]=i/2$, и $\Delta q\Delta p\geq 1/4$

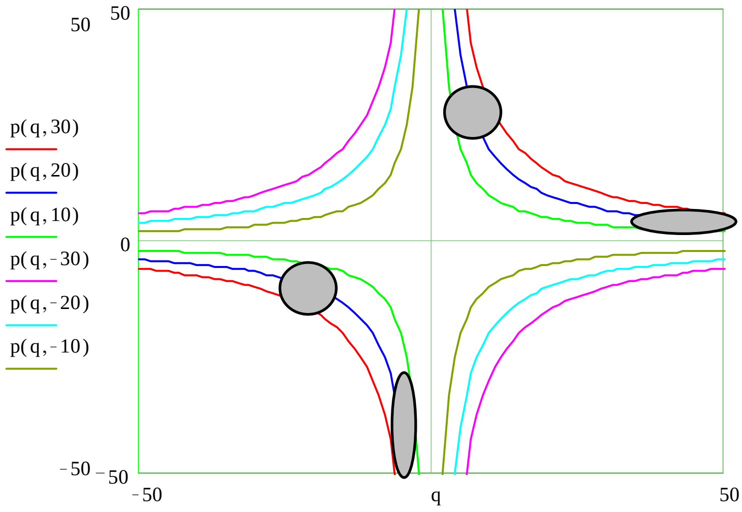
$dq/dt=(d/dt)(a+a^+)/2=\Gamma q$,
$dp/dt=(d/dt)(a-a^+)/2i=-\Gamma p$.

Получим решение для квадратур:
$q(t)=q(0)e^{\Gamma t}$,
$p(t)=p(0)e^{-\Gamma t}$,

Для операторов рождения и уничтожения решение будет иметь вид

$a(t)= q(0)e^{\Gamma t}+i\, p(0)e^{-\Gamma t}= q(0)(sh(\Gamma t)+ch(\Gamma t))+ i\, p(0)(ch(\Gamma t)- sh(\Gamma t))=a\, ch(\Gamma t)+ a^+ sh(\Gamma t)$

Можно построить фазовый портрет этой системы. Причем он будет одинаковый и для классической системы, и для квантовой. Получается, что сжатие будет существовать и в классическом случае (например, на входе – тепловой свет) .



Эволюция квадратур: $q(t)=q(0)e^{\Gamma t}$, $<(q(t))^2>=<(q(0))^2>e^{2\Gamma t}$
$p(t)=p(0)e^{-\Gamma t}$, $<p(t))^2>=<(p(0))^2>e^{-2\Gamma t}$

Найдем, как меняется дисперсия квадратур. (В этом и состоит квадратурное сжатие.)

$\Delta q(t)^2=\Delta q(0)^2 e^{2\Gamma t}$,

$\Delta p(t)^2=\Delta p(0)^2 e^{-2\Gamma t}$,

$\Delta q(t)^2\Delta p(t)^2=\Delta q(0)^2\ \Delta p(0)^2=1/16$; $\Delta q(t)\ \Delta p(t)=1/4$. То есть произведение дисперсий квадратур остается минимальным, но одна из дисперсий «сжимается», а вторая – растет. Которая из двух сжимается? Это зависит от фазы оператора взаимодействия.

Сжатие или уширение соответствующих распределений можно обнаружить путем измерения функции Вигнера.

Найдем $\langle a(t)^2\rangle=\langle(a(0)\ ch(\Gamma t)+a^+(0)\ sh(\Gamma t))^2\rangle=\langle a^2\rangle\ ch^2(\Gamma t)+\langle a^{+2}\rangle sh^2(\Gamma t)+\langle aa^++a^+a\rangle\ ch(\Gamma t)\ sh(\Gamma t)=$
$=(2n+1)\ ch(\Gamma t)\ sh(\Gamma t)$.

Получилось: $\langle a(t)^2\rangle\neq 0$, хотя $\langle a(0)^2\rangle=0$.

Найдем коммутатор $[a,a^+]$ на выходе:

Обозначим $ch(\Gamma t)\equiv u$, $sh(\Gamma t)\equiv v$, $|u|^2-|v|^2=1$

$a(t)=ua(0)+va^+(0)$

$[a(t),a^+(t)]=[ua(0)+va^+(0),\ u^*\ a^+(0)+v^*\ a(0)]=|u|^2[a(0),a^+(0)]+|v|^2[a^+(0),a(0)]=|u|^2-|v|^2=1.$

Преобразование сохраняет коммутаторы.

a(t)=ua(0)+va⁺(0), |u|²-|v|²=1 - ***преобразование Боголюбова***

Это одно из преобразований группы Лоренца.

Покажем, что такой свет – неклассический.
В представлении Гейзенберга можно найти все моменты. Найдем нормированные КФ второго и третьего порядков. Теперь это можно сделать точно, без приближений.
Для моментов получим:

$$\left\langle a^+ a \right\rangle = v^2;$$
$$\left\langle (a^+)^2 a^2 \right\rangle = v^2(u^2 + 2v^2);$$
$$\left\langle (a^+)^3 a^3 \right\rangle = v^4(9u^2 + 6v^2).$$

Для нормированных моментов:

$$g^{(2)} = 2 + \frac{u^2}{v^2};$$
$$g^{(3)} = 6 + 9\frac{u^2}{v^2};$$
$$\frac{g^{(3)}}{\left[g^{(2)}\right]^2} = \frac{6 + 9\frac{u^2}{v^2}}{4 + 2\frac{u^2}{v^2} + \frac{u^4}{v^4}}$$

При малых v получим

$$\frac{g^{(3)}}{\left[g^{(2)}\right]^2} \propto 9v^2 < 1$$

При больших v этот признак не работает! Но воспользуемся признаком

$$\frac{k+1}{k}\frac{p_{k-1}p_{k+1}}{p_k{}^2} < 1$$

Представление Шредингера

$ihd\psi/dt=H\psi+V\psi$,
$\psi\to\psi_0+\psi'$,

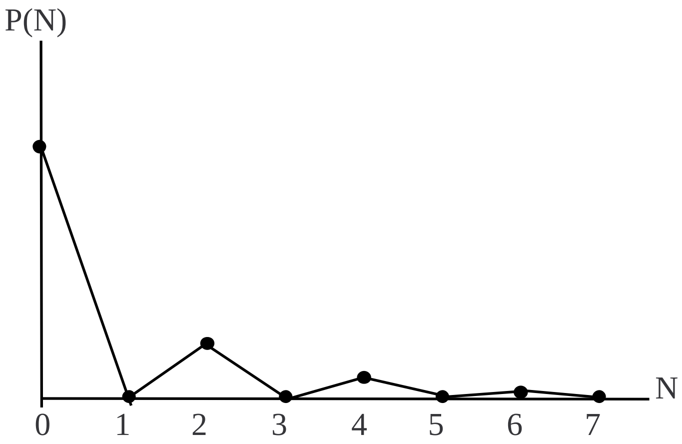
$ihd\psi'/dt=V\psi'=(ih\Gamma/2)(a^{+2}-a^2)\psi'$

$d\psi'/dt=(\Gamma/2)(a^{+2}-a^2)\psi'$

В первом порядке ТВ

$d\psi'/dt=(\Gamma/2)(a^{+2}-a^2)\psi_0==(\Gamma/2)(a^{+2}-a^2)|0\rangle=(\Gamma/\sqrt{2})\ |2\rangle$, ψ'=(Γt/√2) |2⟩, ψ=|0⟩+(Γt/√2) |2⟩.

В высших порядках ТВ появляются состояния |4⟩, |6⟩, |8⟩, ...
Это свет с четным числом фотонов.
Функция распределения числа фотонов:



Поэтому для нечетных больших k

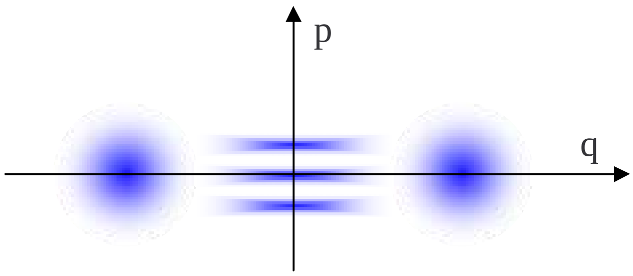
$$p_{k-1} = p_{k+1} = 0,$$
$$\frac{k+1}{k}\frac{p_{k-1}p_{k+1}}{p_k^{\ 2}} = 0$$

Тем самым, признак неклассичности выполняется.

«Коты Шредингера»

Вопрос: А бывает ли свет с нечетным числом фотонов?
Ответ: да. Достаточно рассмотреть суперпозицию двух когерентных состояний
$$\left|\Psi_{cat}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|\alpha\right\rangle - \left|-\alpha\right\rangle).$$
Если разложить когерентные состояния по фоковским, то компоненты с четным числом фотонов сократятся:
$$\left|\Psi_{cat}\right\rangle = \sqrt{2}\sum_k \frac{1}{\sqrt{(2k+1)!}} e^{-|\alpha|^2/2}\alpha^{2k+1}.$$
Этот свет неклассический – во-первых, по тому же признаку
$$p_{k-1} = p_{k+1} = 0,$$
$$\frac{k+1}{k}\frac{p_{k-1}p_{k+1}}{p_k^{\ 2}} = 0,$$
а во-вторых, для него функция Вигнера кое-где отрицательна: в области между состояниями $\left|\alpha\right\rangle$ и $\left|-\alpha\right\rangle$ у нее имеются интерференционные полосы (см. рисунок), и минимумы этих полос отрицательны.

Почему это состояние называют «шредингеровским котом»? Потому что ситуация с котом Шредингера – пример (казалось бы, абсурдный) того, что макроскопическая система может находиться в суперпозиции двух квантовых состояний (живого и мертвого кота). А когерентные состояния – как раз пример макроскопических состояний. Но, так же как и с котом, квантовые эффекты будут заметны только если состояния не очень макроскопические. То есть если число фотонов в когерентных состояниях мало. Так, с ростом среднего числа фотонов эволюция рисунка будет такой: максимумы будут раздвигаться, а полоски становиться все чаще и все менее ярко выраженными.



Как приготовить такое состояние? Казалось бы, сбить $|\alpha\rangle$ и $|-\alpha\rangle$ на светоделителе. Но так не выходит: если сбить их на светоделителе, то на одном выходе получим вакуум, а на другом $|2\alpha\rangle$.

Есть более хитрый способ – приготовить свет с четным числом фотонов (мы знаем, как), а потом «отщепить» один фотон на светоделителе с очень малым коэффициентом отражения. То, что пройдет, будет состоять из нечетных чисел фотонов.