

Лекция 7

Признаки неклассичности для света с большим числом фотонов.
Функции Глаубера-Сударшана, Вигнера и Хусими. Методы их измерения.
Квантовая томография.

Свет с малым числом фотонов и «макроскопические» (многофотонные) состояния.

Итак, «когда фотонов мало», можно исследовать их статистику двумя способами: (1) измерять распределение фотоотсчетов (моменты $\langle m^k \rangle$ или вероятности $\langle p_m \rangle$) и (2) измерять нормально-упорядоченные моменты (корреляционные функции Глаубера) $g^{(k)}$. В первом случае регистрируется число фотоотсчетов одного фотодетектора, случившихся за определенное время, а во втором случае – число совпадений фотоотсчетов между k фотодетекторами. Но что если фотонов много? Так много, что счет фотонов невозможен? Кроме того, когда фотонов много, то глауберовские корреляционные функции даже для неклассических полей ведут себя вполне классически. Так, для СПР нормированная корреляционная функция второго порядка $g^{(2)}$ зависит от среднего числа фотонов на моду N как $g^{(2)} = 1 + \frac{1}{N}$; поэтому при больших N $g^{(2)} = 1$, как для когерентного поля.

Поэтому, «когда фотонов много», и экспериментальная техника, и теоретический аппарат должны быть другими. Вместо детекторов, работающих в режиме счета фотонов, используется *гомодинное детектирование*, вместо операторов числа фотонов и нормально упорядоченных степеней числа фотонов $\hat{N}, : \hat{N}^k :$ – операторы квадратур и степени (обычно квадрат) числа фотонов *без нормального упорядочения*: $\hat{x}, \hat{p}, \hat{N}, \hat{N}^2, \dots$

Когда же «фотонов много», а когда «мало»? Все определяется *параметром вырождения* $N = \frac{\lambda^3 I_{\omega\Omega}}{\hbar c}$ (здесь $I_{\omega\Omega}$ – спектральная яркость) – т.е. *числом фотонов на моду* или, что то же самое, *числом фотонов в объеме когерентности*. Если $N \leq 1$, фотонов мало; если $N \gg 1$ – много.

Описание состояния света с большим числом фотонов. (Непрерывное представление)

Основными измеряемыми величинами будут теперь квадратуры q, p , соответствующие эрмитовым операторам координаты и импульса: $\hat{x} \equiv \frac{a + a^\dagger}{2}, \hat{p} \equiv \frac{a - a^\dagger}{2i}$. (Далее, в разделе, посвященном двухмодовому сжатию, будет идти речь также о дисперсии разностного числа фотонов, но пока мы ограничимся квадратурами.) Естественно было бы задать распределение вероятности $P(q, p)$ для квадратур, но так как $[\hat{x}, \hat{p}] \neq 0$, то квадратуры одновременно измерить невозможно, а значит, *их совместного распределения не существует*. Поэтому можно придумать лишь аналог вероятности $P(q, p)$. Таких аналогов несколько, но все они теряют какие-то свойства, присущие вероятности, и поэтому называются *функциями квазивероятности*.

***P*-функция, или функция Глаубера-Сударшана.**

Удобнее всего определить квазивероятность как матрицу плотности в базисе когерентных состояний:

$$\rho = \sum_{N, N'} \rho_{NN'} |N\rangle \langle N'| = \iint d^2 z P(z) |z\rangle \langle z|,$$

$$\iint d^2 z P(z) = 1, \quad P(z) = P^*(z).$$

Это и есть функция Глаубера-Сударшана. Вспомним, что функция $P(z)$ удобна, когда нужно усреднять нормально-упорядоченные операторы. Тогда от квантового среднего можно перейти к интегралу по комплексной плоскости z', z'' и вместо a^+ поставить z^* , а вместо a - z :

$\langle : f(a^+, a) : \rangle = \int d^2 z P(z) f(z^*, z)$. Например, если усреднить оператор

$e^{wa^+} e^{-w^*a} \equiv e^{wa^+ - w^*a} :$, то получится так называемая нормально упорядоченная характеристическая функция

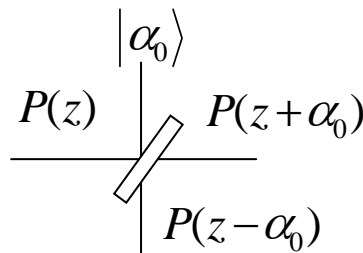
$\chi(w) \equiv \langle : e^{wa^+ - w^*a} : \rangle \equiv \langle e^{wa^+} e^{-w^*a} \rangle = \int d^2 z P(z) e^{wz^* - w^*z}$. Это комплексный Фурье-образ P -

функции; обратное преобразование имеет вид $P(z) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 w \chi(w) e^{-wz^* + w^*z}$.

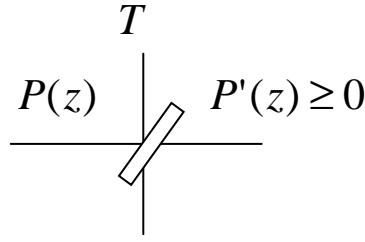
Функция Глаубера – Сударшана - не всегда «хорошая». Для некоторых видов полей она сингулярна или отрицательна. По определению, такие поля называются неклассическими. Это не операциональное определение: измерить сингулярность нельзя. Вообще, поскольку функция Глаубера – Сударшана может быть сингулярной, то ясно, что ее в принципе нельзя измерить.

Пограничный, как всегда, случай – когерентное состояние. Для него P -функция – дельта-функция. Хоть и сингулярна, но интегрируема.

Что произойдет, если к одному полю «подмешать» другое? Это можно сделать с помощью светоделиителя. При этом характеристические функции перемножаются, а их Фурье-образы, т.е. P -функции, образуют свертку. Поэтому подмешивание к исследуемому полю когерентного поля только сдвигает P -функцию, не меняя ее формы. Другое дело – тепловое поле.



Мера Ли. (Так ее назвал Д.Н.Клышко, а сейчас ее принято называть мерой Ли - Клышко). Оказывается, если подмешать к исследуемому полю тепловое поле с достаточным числом фотонов на моду T (от 0 до 1), то на выходе получится «хорошая» (регулярная и неотрицательная) P -функция. Величина T , при которой $P'(z)$ становится неотрицательной, и называется мерой Ли.



Характеристическая функция теплового поля равна $\chi_T(w) = e^{-Tww^*}$, а ее Фурье-образ - $P_T(z) = \frac{1}{\pi T} e^{-|z|^2/T}$.

Функция Вигнера. Если подмешивается тепловое поле с половиной фотона в среднем, $T = 1/2$, то результирующая характеристическая функция будет $\chi'(w) = e^{-\frac{1}{2}ww^*} \chi(w)$ (характеристические функции перемножаются), то есть

$$\chi'(w) = e^{-\frac{1}{2}ww^*} \langle e^{wa^+} e^{-w^*a} \rangle = \left\langle e^{-\frac{1}{2}ww^*} e^{wa^+} e^{-w^*a} \right\rangle = \langle e^{wa^+ - w^*a} \rangle \equiv \chi_s(w)$$

(мы воспользовались формулой Бейкера-Хаусдорфа

$$e^{A+B} = e^{-[A,B]/2} e^A e^B = e^{[A,B]/2} e^B e^A$$

Это симметризованная характеристическая функция. А ее Фурье-образ называется функцией Вигнера:

$$W(z) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2w \langle e^{wa^+ - w^*a} \rangle e^{-wz^* + w^*z}$$

Эта функция уже обладает свойством регулярности. (Подмешали полфотона теплового поля – и сделали квазивероятность регулярной функцией.) Поэтому функцию Вигнера уже можно измерить. Но она все же может быть отрицательной. Ее отрицательность - признак неклассичности излучения.

Функция Хусими, или Q – функция. Если же подмешать тепловое поле с одним фотоном на моду – получится квазивероятность, которая всегда неотрицательна. Иногда ее называют вероятностью. (Так и должно быть, т.к. мера Ли $0 < T < 1$.) Аналогично получаем:

$$\chi'(w) = e^{-ww^*} \langle e^{wa^+} e^{-w^*a} \rangle = \left\langle e^{-\frac{1}{2}ww^*} e^{wa^+ - w^*a} \right\rangle = \langle e^{-w^*a} e^{wa^+} \rangle \equiv \chi_a(w)$$

Это антинормально упорядоченная ХФ. А ее Фурье-образ – это Q-функция:

$$Q(z) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2w \langle e^{-w^*a} e^{wa^+} \rangle e^{-wz^* + w^*z}$$

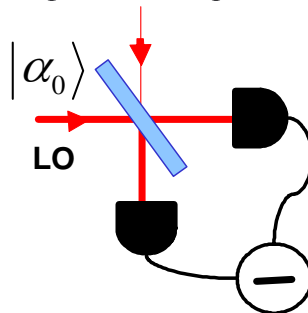
Еще одно (эквивалентное) определение Q-функции:

$$Q(z) = \langle z | \rho | z \rangle, \text{ вероятность найти исследуемый свет в когерентном состоянии } |z\rangle.$$

Как измерить квазивероятности? P-функцию нельзя, а остальные две – можно. Для этого следует использовать гомодинное детектирование.

Гомодинное детектирование.

Для детектирования полей с большим числом фотонов используют метод гомодинного детектирования. Исследуемое поле сбивают на светоделителе с сильным когерентным полем (гомодином, или *local oscillator*) с той же частотой, а на одном или на обоих выходах светоделителя ставят фотодетекторы:



При так называемом сбалансированном фотодетектировании светоделитель 50%, фотодетекторы одинаковы, и измеряется разностный ток i_- . Если операторы уничтожения фотона входного поля (сравнительно слабого) и гомодина (гораздо более мощного) обозначить a, a_0 , а соответствующие операторы в выходных модах - a_1, a_2 , то с учетом преобразования полей на светоделителе получим, что $\hat{I}_- = a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2 = a_0^+ a^+ + a_0^+ a$ (мы считаем КЭ равной единице, т.е. ток равен просто числу фотонов). Считая поле гомодина классическим, $a_0 = |\alpha_0| e^{i\varphi}$, мы получим, что разностный ток – измеряемая величина, соответствующая оператору $\hat{I}_\varphi = \frac{1}{2}(a^+ e^{-i\varphi} + a e^{i\varphi}) = \hat{I} \cos \varphi + \hat{I} \sin \varphi$. В зависимости от фазы гомодина это либо \hat{I} , либо \hat{I} , либо промежуточные квадратуры.

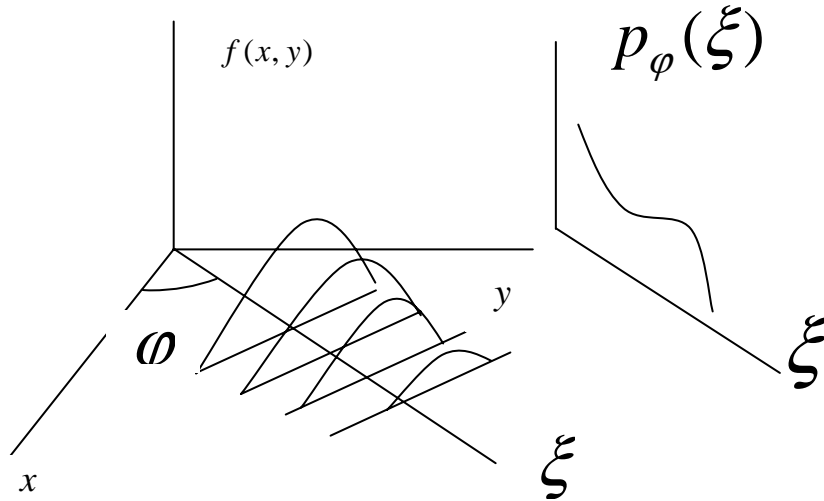
А распределение разностного фототока $P(i_-)$ при определенных фазах будет соответствовать распределению координаты и импульса $P(q), P(p)$.

Квантовая томография (точнее, оптическая гомодинная томография).

Задача. Чему равна P-функция для вакуума? А функция Вигнера? А Q-функция?

Теперь мы можем снять такие распределения $P(q_\varphi)$ для каждой «повернутой» квадратуры. Оказывается, по ним можно восстановить функцию Вигнера тем же преобразованием Радона, которое используется в обычной томографии.

В обычной томографии задача ставится так. Пусть имеется функция двух переменных $f(x, y)$ (для простоты рассматривается двумерный случай, но если нужно исследовать трехмерный объект, как, например, голова, то это можно сделать послойно). Измерения дают нам лишь проекции («тени») этой функции на какие-то направления, но зато направления эти могут быть любыми.



Проекция, или *томограмма*: $p_\varphi(\xi) = \int f(x, y) \delta(x \cos \varphi + y \sin \varphi - \xi) dx dy$ (прямое преобразование Радона).

Обратное преобразование Радона менее тривиально. Это переход от набора всевозможных томограмм $p_\varphi(\xi)$ к функции $f(x, y)$. Делается в две ступени:

1) Фурье-преобразование томограмм.

$$s_\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p_\varphi(\xi) e^{-i\omega\xi}$$

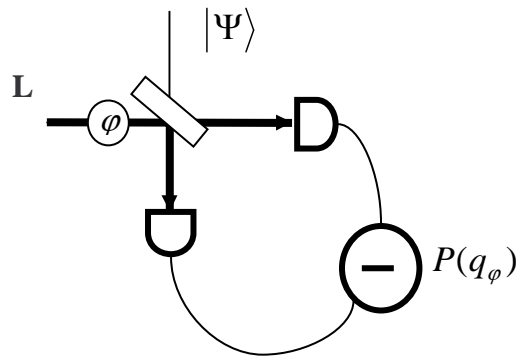
2) После того, как для всех φ получены $s_\varphi(\omega)$, можно взять двумерный Фурье-образ

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du dv s_\varphi(\omega) e^{iux+ivy}, \quad u \equiv \omega \cos \varphi, v \equiv \omega \sin \varphi,$$

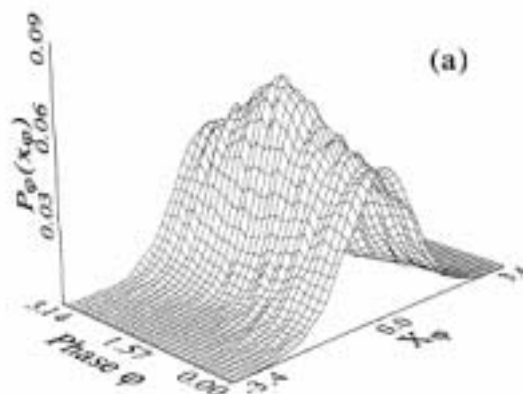
т.е. $f(x, y) = \iint \omega d\omega d\varphi s_\varphi(\omega) e^{i\omega x \cos \varphi + i\omega y \sin \varphi}$

Преобразование Радона – стандартное преобразование (как Фурье, Лапласа и т.д.), поэтому для него существуют стандартные пакеты программ.

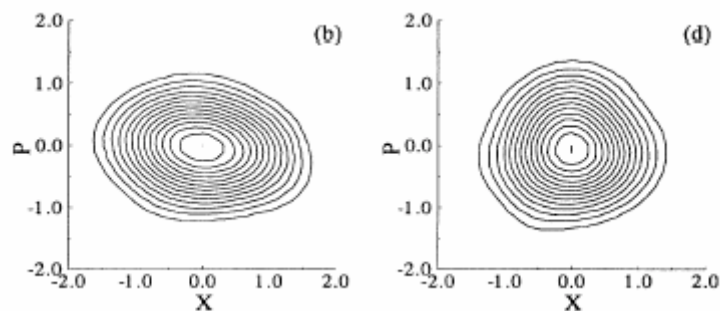
В *квантовой томографии* распределения для квадратур $P(q_\varphi)$ служат томограммами для функции Вигнера. И она восстанавливается по ним с помощью обратного преобразования Радона. Отрицательность восстановленной функции Вигнера свидетельствует о неклассичности исследуемого излучения.



Экспериментальные томограммы из первой работы по оптической гомодинной томографии [Smithey, Beck, Raymer, Faridani, PRL 70, 1244 (1993)].



По этим томограммам была восстановлена такая функция Вигнера (вакуум, сжатое состояние):



Заметим: в обоих случаях отрицательных значений не получилось. Но сжатый свет – это неклассический свет; почему же для него функция Вигнера положительна? Потому что отрицательность функции Вигнера – достаточное, а не необходимое условие неклассичности (признак).

Измерение функции Хусими.

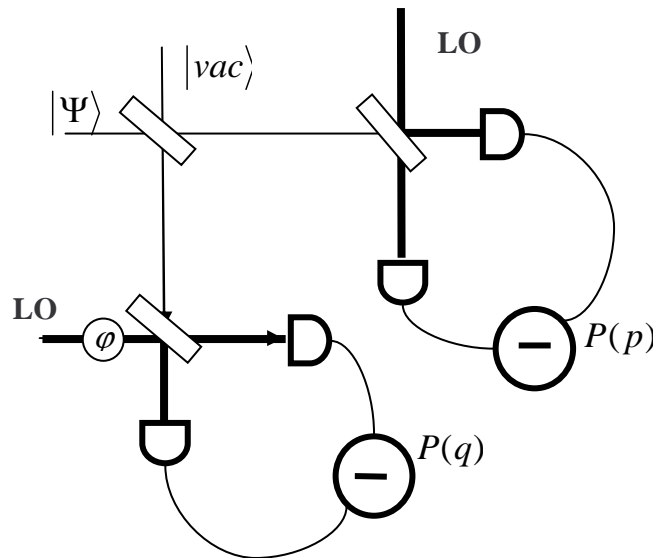
Из лекции 7 следует, что при подмешивании теплового поля со средним числом фотонов на моду $\frac{1}{2}$ функция Хусими превращается в функцию Вигнера. То есть подмешиваем $\frac{1}{2}$ фотона, проводим квантовую томографию – и получаем функцию Хусими. Она никогда не оказывается отрицательной. Но по ней можно однозначно восстановить функцию Вигнера.

Но как подмешать $\frac{1}{2}$ фотона?

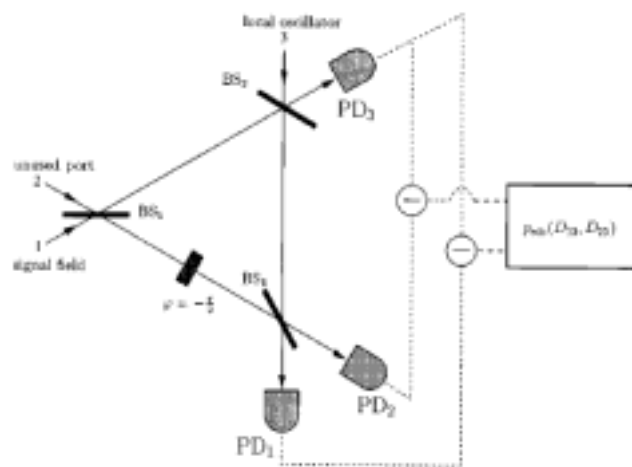
Рассмотрим такую схему: разделим исследуемый пучок на светоделителе, и зададимся вопросом: нельзя ли после светоделителя в одном плече померить (гомодинным детектированием) координату q , а в другом импульс p ? Тогда можно и совместное их распределение снять: $P(q, p)$. Казалось бы, это будет функция Вигнера $W(q, p)$: ведь без светоделителя измеряемое распределение вероятности соответствует

$\int dp W(q, p) = W(q)$ или $\int dq W(q, p) = W(p)$? Оказывается, не получится $W(q, p)$. То, что в результате получится (совместное распределение $P(q, p)$), как раз и будет функцией Хусими. А роль половинки фотона на моду как раз выполняет вакуум, так как величина вакуумных флуктуаций и составляет эту $\frac{1}{2}$ фотона.

Все это показывает еще раз, что в квантовой оптике непрерывных переменных с вакуумом, или со свободным входом светоделителя, надо обходиться весьма осторожно.



А вот настоящая экспериментальная схема для измерения функции Хусими:



[A. Zucchetti, W. Vogel, D.-G. Welsch, PRA 54, 856 (1996)].