Лекция 6

Определения неклассического света.

Наблюдаемые признаки неклассического света.

Парадоксально, но считается, что квантовая оптика началась с эксперимента Брауна-Твисса (1956) - а он вполне описывается в рамках классической теории!

Несколько позже (1965-1967 гг) были разработаны источники световых полей, которые не описываются классической теорией, и для описания которых следует пользоваться квантовой теорией. Это однофотонные и двухфотонные поля, и речь о них пойдет ниже. Но что значит “не описываются”? Это значит, что какие-то элементы описания (определения, свойства) вступают в противоречия с другими. Так вот, в рамках последовательно классической теории никаких противоречий не возникает, так же как и в рамках квантовой теории.

Противоречия возникают при ***полуклассическом описании****, т.е. когда фотодетектор (прибор) описывается квантовомеханически, а поле классически.*

С квантовым описанием поля вы уже сталкивались. Вполне последовательно и “правильно” поле может быть задано функцией Глаубера-Сударшана - она же нормально упорядоченная квазивероятность, P-распределение и т.д. Можно также назвать ее матрицей плотности в базисе когерентных состояний:

$$\rho = \sum_{N,N'} \rho_{NN'} \left|N\right\rangle\left\langle N'\right| = \iint d^2 z P(z) \left|z\right\rangle\left\langle z\right|,$$
$$\iint d^2 z P(z) = 1, \quad P(z) = P^*(z).$$

Для когерентного состояния $\left|z_0\right\rangle$ $P(z) = \delta^{(2)}(z - z_0)$. Этот случай - пограничный между классическим и неклассическим светом, т.к. *формально* ***неклассический свет*** *определяется как* ***свет, для которого P-распределение Глаубера-Сударшана отрицательно или является нерегулярной (обобщенной) функцией***. Для когерентного света эта функция сингулярна, но неотрицательна и интегрируема.

Но если взять, например, фоковское состояние $\left|N\right\rangle$, то для него P-распределение - обобщенная функция, и к тому же принимающая отрицательные значения: $P_N(z) = \dfrac{N!}{(2N)!\pi|z|} e^{|z|^2} (\dfrac{d}{d|z|})^{2N} \delta(|z|)$. Эта функция имеет 4N особенностей в нуле.

Это не операциональное определение, т.к. P-распределение нельзя (во всяком случае, непосредственно) измерить. Непосредственно измеряется интенсивность света или ее моменты. Или распределение фотоотсчетов. Фотоотсчеты - случайный процесс, и можно говорить об их числе m за время наблюдения, среднем $\left\langle m\right\rangle$, дисперсии $\Delta m^2 \equiv \left\langle m^2\right\rangle - \left\langle m\right\rangle^2$ и других моментах. Из дисперсии и среднего строятся два параметра - фактор Фано и параметр группировки,

$$F \equiv \frac{\Delta m^2}{\langle m \rangle}, \quad g_m^{(2)} \equiv 1 + \frac{\Delta m^2 - \langle m \rangle}{\langle m \rangle^2}.$$

(Индекс m здесь добавлен, чтобы отличать моменты распределения числа фотоотсчетов от моментов числа фотонов.)

Обычно приводят признаки неклассичности $F < 1$, $g_m^{(2)} < 1$ (антигруппировка). Покажем, что это действительно вступает в противоречие с полуклассическим описанием.

Полуклассическая формула Манделя. В самом примитивном виде она записывается для нефлуктуирующей интенсивности света:

$p_m = \frac{1}{m!}\langle m \rangle^m e^{-\langle m \rangle}$. При этом $\langle m \rangle = \alpha I_0$, где I_0 - интенсивность поля на входе в фотодетектор, а α - коэффициент пропорциональности, зависящий от квантовой эффективности и объема детектирования. Будем считать детектор одномодовым (объем детектирования равен объему когерентности) и идеальным (квантовая эффективность равна единице). Удобно ввести число фотонов на моду, или ***число фотонов в объеме когерентности***,

$n \equiv \frac{|E|^2}{8\pi}\frac{V_{coh}}{\hbar\omega_0} = \frac{W\lambda_0}{hc\Delta\omega}$. Здесь W – мощность.

Тогда $\langle m \rangle = n$, и $p_m = \frac{1}{m!}n^m e^{-n}$. а если n флуктуирует, то нужно дополнительно усреднить, и формула Манделя принимает вид

$$p_m = \int_0^{+\infty} dn P(n) \frac{1}{m!} n^m e^{-n}.$$

Функция $P(n) \ge 0$, $\int_0^{+\infty} P(n) dn$, - классическая плотность вероятности для числа фотонов. (Для интенсивности.)

По идее, флуктуации m должны быть больше, чем при постоянном n. Но мы увидим, что иногда они могут подавляться.

Таким образом, мы описываем флуктуации интенсивности (числа фотонов) классическим распределением. И получаем распределение числа отсчетов m. Это уже экспериментально измеримое распределение. Есть два способа его задать:

1) задать набор вероятностей p_m;

2) задать набор моментов $\langle m^k \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} m^k p_m$.

Можно также задать так называемые факториальные моменты:

$$G_m^{(k)} \equiv \langle m(m-1)...(m-k+1) \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m-k)!} p_m.$$

Например, $G_m^{(1)} \equiv \langle m \rangle$, $G_m^{(2)} \equiv \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle$.

Напомним, что при квантовом описании факториальные моменты для числа фотоотсчетов просто связаны с факториальными (т.е. нормально упорядоченными) моментами числа фотонов, т.е.

$G_m^{(k)} = \eta^k G^{(k)}$, $G^{(k)} \equiv \left\langle :\hat{N}^k: \right\rangle = \left\langle \hat{N}(\hat{N}-1)...(\hat{N}-k+1) \right\rangle$. При единичной квантовой эффективности, $\eta = 1$, $G_m^{(k)} = \left\langle :\hat{N}^k: \right\rangle$.

А для полуклассики (и тоже при единичной квантовой эффективности) $G_m^{(k)} = \left\langle n^k \right\rangle$, т.е. факториальный момент числа фотоотсчетов связан с обычным моментом числа фотонов. Покажем это.

$G_m^{(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m-k)!} p_m$, но $p_m = \int_0^{+\infty} dn P(n) \frac{1}{m!} n^m e^{-n}$. Поэтому

$$G_m^{(k)} = \int_0^{+\infty} dn P(n) e^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m-k)!} n^m = \int_0^{+\infty} dn P(n) e^{-n} n^k \sum_{m-k=0}^{\infty} \frac{n^{m-k}}{(m-k)!} =$$

$$= \int_0^{+\infty} dn P(n) e^{-n} n^k e^n = \left\langle n^k \right\rangle.$$

Моменты распределения фотоотсчетов должны удовлетворять некоторым свойствам, которые следуют из свойств $P(n)$. Например, не должно быть ***антигруппировки*** - поэтому ***антигруппировка*** и есть один из признаков неклассичности. Действительно, параметр группировки

$g_m^{(2)} \equiv 1 + \frac{\Delta m^2 - \langle m \rangle}{\langle m \rangle^2} = \frac{\left\langle m^2 \right\rangle - \langle m \rangle}{\langle m \rangle^2} = \frac{\left\langle n^2 \right\rangle}{\langle n \rangle^2} \ge 1$, т.к. $\left\langle n^2 \right\rangle \ge \langle n \rangle^2$. Докажем последнее неравенство.

Один из вариантов неравенства Коши-Шварца -

$\left\langle f^2 \right\rangle \left\langle g^2 \right\rangle \ge \langle fg \rangle^2$ при вещественных $f \ge 0,\ g \ge 0$. Для функций это неравенство имеет вид

$\int f^2(x)dx \int g^2(x)dx \ge \left[\int f(x) g(x) dx \right]^2$.

Пусть $f = \sqrt{P(n)}n$, $g = \sqrt{P(n)},$, тогда $\int n^2 P(n) dn \int P(n) dn \ge \left[\int n P(n) dn \right]^2$. Тем самым, $\left\langle n^2 \right\rangle \ge \langle n \rangle^2$.

Так что один из признаков неклассичности - это меньший единицы параметр группировки фотоотсчетов, т.е. ***субпуассоновская статистика фотоотсчетов***.

Формулировку можно расширить - ***неклассический свет - такой, который не согласуется с полуклассической формулой Манделя***. Это определение. Но как экспериментально зарегистрировать это несогласование?

Для этого надо решить проблему моментов, т.е. по моментам $\left\langle m^k \right\rangle$ или вероятностям p_m найти $P(n)$ и обнаружить у нее “неправильные” свойства (отрицательность или ненормированность).

$$P(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} G_m^{(k)} \frac{d^k}{dn^k} \delta(n).$$

В [статье Д.Н.Клышко «Неклассический свет»] показано, что $P(n)$ можно рассчитать по $G_m^{(k)}$ или по p_m:

Пусть, например, только один момент $G_m^{(k)}$ отличен от нуля, $G_m^{(k)} = \delta_{kK}$. Тогда

$P(n)=\frac{(-1)^K}{K\,!}\frac{d^K}{dn^K}\delta(n)$. Ясно, что такая плотность вероятности не удовлетворяет ни нормировке, ни неотрицательности.
Можно выразить $P(n)$ и так:

$P(n)=e^n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,p_k\,\frac{d^k}{dn^k}\delta(n)$. Пусть регистрируется фоковское K-фотонное состояние, тогда

$$P(n)=e^n(-1)^K\,\frac{d^K}{dn^K}\delta(n).$$

Однако может получиться, что сами моменты и вероятности “хорошие”, но связи между ними “плохие”. Какие связи между моментами должны давать “правильную” плотность вероятности $P(n)$? (Сейчас будут сформулированы еще некоторые признаки, т.е. ***достаточные условия***, неклассичности.)
В той же статье [ДНК, «Неклассический свет»] получены следующие признаки:

$$D_k(1)\equiv\frac{(k+1)p_{k-1}p_{k+1}}{kp_k{}^2}<1,$$

$$D_k(0)\equiv\frac{g_{k-1}g_{k+1}}{g_k{}^2}<1,\quad g_k\equiv\frac{G_m^{(k)}}{G_m^{(1)k}}.$$

Прологарифмируем второе условие.

$\frac{1}{2}\{\ln g_{k-1}+\ln g_{k+1}\}<\ln g_k$, т.е. выпуклость распределения факториальных моментов. При $k=1$ получим из второго условия: $g^{(2)}<1$, т.е. антигруппировку.
Проверим эти условия для когерентного и теплового света.

$$D^{coh}{}_k(1)=D^{coh}{}_k(0)=1,$$

$$D^{th}{}_k(1)=D^{th}{}_k(0)=\frac{k+1}{k}>1.$$

(предпоследнее соотношение следует из того, что для теплового света $p_k=\left(\frac{1}{1+1/\langle m\rangle}\right)^k$.)

Еще раз подчеркнем: это только признаки неклассичности; критерий же (необходимое и достаточное условие) строится на основе *всех* моментов распределения фотоотсчетов. Из них можно составить некие матрицы (Ганкеля), и их определители должны быть неотрицательны.