Лекция 5

Инварианты поляризационных преобразований SU(2).
Коммутационные соотношения для операторов Стокса. Измерение параметров Стокса: среднее и дисперсия. Двухфотонное и когерентное поляризационные состояния.

Инварианты преобразований поляризации

Вспомним матрицу когерентности (она же поляризационная матрица) для квантового случая:

$$K = \begin{pmatrix} N_x \equiv \langle a^+ a \rangle & S_+ \equiv \langle a^+ b \rangle \\ S_- \equiv \langle a b^+ \rangle & N_y \equiv \langle b^+ b \rangle \end{pmatrix}.$$

При поляризационных преобразованиях, реализуемых фазовыми пластинками и ротаторами (SU(2) преобразованиях), матрица K преобразуется как

$\mathbf{K'}=\mathbf{D^+KD}$, где D - матрица Джонса.

Следовательно, как при любом унитарном преобразовании, сохраняется определитель и шпур. Это инварианты преобразования:

$\det\mathbf{K}=N_xN_y-|S_+|^2=const$; $Sp\mathbf{K}=N_x+N_y=const=S_0$. Второй инвариант - это энергия.
Для однофотонного состояния $\langle S_0\rangle=1$.
Из этих двух инвариантов следует еще один - *степень поляризации***,** она же *длина вектора Стокса* $P= (\langle S_1\rangle^2+ \langle S_2\rangle^2+ \langle S_3\rangle^2)^{1/2}$:

$\langle S_1\rangle^2+ \langle S_2\rangle^2+ \langle S_3\rangle^2=(Sp\mathbf{K})^2-4\det\mathbf{K}=const.$

Для однофотонного состояния P=1, для других состояний P<1, и вектор Стокса - не единичный. Можно изобразить его на сфере с радиусом, меньшим 1. Ясно, что преобразования SU(2) для вектора Джонса (SO(3) для вектора Стокса) просто поворачивают вектор Стокса, не меняя его длины.

Докажем одно полезное соотношение.

Найдем $S_1^2+ S_2^2+ S_3^2=(a^+a-b^+b)^2+(a^+b+b^+a)^2-(a^+b-b^+a)^2= a^+a\, a^+a+$
$+b^+b\, b^+b-2\, a^+a\, b^+b\underline{+ a^+b\, a^+b} + b^+a\, b^+a +2\, a^+b\, b^+a +$
$+2\, b^+a\, a^+b\underline{- a^+b\, a^+b}- b^+a\, b^+a =$
$= a^+a\, a^+a+b^+b\, b^+b-2a^+a\, b^+b+2\, a^+b\, b^+a +$
$+2\, b^+a\, a^+b= a^+a(a^+a+2\, b^+b+2)+$
$+b^+b(b^+b+2\, a^+a+2) -2a^+a\, b^+b= a^+a(a^+a+ b^+b+2)+$
$+ b^+b(a^+a+ b^+b+2)=S_0(S_0+2)$
Итак, $\mathbf{S}^2\equiv(\mathbf{SS})\equiv S_1^2+ S_2^2+ S_3^2= S_0^2+2S_0=\mathbf{:}S_0^2\mathbf{:}+3S_0$, т.к. $\mathbf{:}S_0^2\mathbf{:}=$
$=(a^+)^2a^2+(b^+)^2b^2+2\, a^+a\, b^+b=S_0^2-S_0$

Для однофотонного состояния

$<S_1^2>=< a^+a\, a^+a+ b^+b\, b^+b-2\, a^+a\, b^+b>=|\alpha|^2+|\beta|^2=1$
$<S_2^2>=< a^+b\, a^+b+ b^+a\, b^+a+ a^+b\, b^+a+ b^+a\, a^+b >=<a^+a+b^+b>=|\alpha|^2+|\beta|^2=1$
$<S_3^2>=-< a^+b\, a^+b+ b^+a\, b^+a-a^+b\, b^+a- b^+a\, a^+b >=<a^+a+b^+b>=|\alpha|^2+|\beta|^2=1$

Об измерении переменных Стокса

Нельзя измерить даже один параметр Стокса для одного фотона. Но для большого числа одинаково приготовленных фотонов - можно. (Схема – в конце предыдущей лекции).
При этом нельзя «клонировать» фотон. (Теорема о невозможности «клонирования» квантового состояния).
Допустим, измеряется S_1. За N щелчков. Тогда щелчок детектора 1 дает
$S_1=1$, щелчок детектора 1' - $S_1=-1$, и

$<S_1>=(\sum_i S_i)/N$

Но насколько велика будет неопределенность измерения S_1? Т.е. каков будет разброс?

Коммутационные соотношения для операторов Стокса

$[S_0,S_1]=[a^+a+b^+b,\ a^+a-b^+b]=0;$
$[S_0,S_2]=[a^+a+b^+b,\ a^+b+b^+a]=[a^+a,\ a^+b]+[a^+a,\ b^+a]+[b^+b,\ a^+b]+[b^+b,\ b^+a]=$
$\quad =a^+b-b^+a- a^+b+ b^+a=0;$
$[S_0,S_3]=-i[a^+a+b^+b,\ a^+b-b^+a]=-i\{[a^+a,\ a^+b]+[b^+b,\ a^+b]-[a^+a,\ b^+a]-[b^+b,\ b^+a]\}=$
$\quad =-i\{ a^+b - a^+b + b^+a - b^+a \}=0;$
$[S_1,S_2]=[a^+a-b^+b,\ a^+b+b^+a]=[a^+a,\ a^+b]+[a^+a,\ b^+a]-[b^+b,\ a^+b]-[b^+b,\ b^+a]=$
$\quad = a^+b- b^+a+ a^+b- b^+a=2iS_3;$
$[S_2,S_3]=-i[a^+b+b^+a,\ a^+b-b^+a]=-2i[b^+a,\ a^+b]=-2i\{[b^+a,\ a^+]b+ a^+[b^+a,\ b]\}=$
$\quad =-2i\{ b^+b- a^+a \}=2iS_1;$
$[S_3,S_1]=-i[a^+b-b^+a,\ a^+a-b^+b]=-i\{[a^+b,\ a^+a]+[b^+a,\ b^+b]-[b^+a,\ a^+a]-[a^+b,\ b^+b]\}=$
$\quad =-i\{- a^+b - b^+a - b^+a - a^+b \}=2iS_2$

Стало быть, операторы Стокса не коммутируют. Коммутационные соотношения - как для матриц Паули.
Есть соотношение:

$\Delta S_1\Delta S_2\geq|\langle[S_1S_2]\rangle|/2$. Например, $\Delta p\Delta q\geq \hbar/2$.

Докажем его.

Рассмотрим два произвольных оператора A, B и произвольное состояние $|\psi\rangle$, по которому будем усреднять. Возьмем произвольное комплексное число $z=xe^{i\varphi}$, и построим оператор C=A+zB и вектор $|\psi'\rangle=C|\psi\rangle$. Его норма $\langle\psi'|\psi'\rangle\geq 0$, получим

$0\le\langle\psi'|\psi'\rangle=\langle\psi|C^+C|\psi\rangle\equiv\langle C^+C\rangle=\langle(A^++z^*B^+)(A+zB)\rangle=\langle A^+A\rangle+2\mathrm{Re}\langle A^+zB\rangle+|z|^2\langle B^+B\rangle=$

$=\langle A^+A\rangle+2x\mathrm{Re}(\langle A^+B\rangle e^{i\varphi})+x^2\langle B^+B\rangle.$

Это квадратичная форма относительно x; ее неотрицательность накладывает ограничение на коэффициенты:

$(\mathrm{Re}\{\langle A^+B\rangle e^{i\varphi}\})^2\le\langle A^+A\rangle\langle B^+B\rangle.$

Это квантовое неравенство Коши-Шварца.
Возьмем $\phi=\pi/2$.

$(\mathrm{Re}\{i\langle A^+B\rangle\})^2\le\langle A^+A\rangle\langle B^+B\rangle$

$(\mathrm{Im}\langle A^+B\rangle)^2\le\langle A^+A\rangle\langle B^+B\rangle$

$\langle A^+B-B^+A\rangle^2\le4\langle A^+A\rangle\langle B^+B\rangle$

Пусть операторы эрмитовы, тогда

$\langle AB-BA\rangle^2\le4\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle$

$\langle[AB]\rangle^2\le4\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle$

Заменим $A\to\Delta A\equiv A-\langle A\rangle$, $B\to\Delta B\equiv B-\langle B\rangle$. $[\Delta A,\Delta B]=[A,B]$.

$\langle[AB]\rangle^2\le4\langle\Delta A^2\rangle\langle\Delta B^2\rangle$

Извлекаем корень, получим

$\Delta A\Delta B\ge|\langle[AB]\rangle|/2.$

Например, $A=q$, $B=p$, $\Delta q\Delta p\ge z/2$.

Или $A=S_1$, $B=S_2$,

$\Delta S_1\Delta S_2\ge|\langle S_3\rangle|$

Аналогично, $\Delta S_2\Delta S_3\ge|\langle S_1\rangle|$, $\Delta S_1\Delta S_3\ge|\langle S_2\rangle|$

Поэтому $\Delta S_1\Delta S_2\Delta S_3\ge|\langle S_1\rangle\langle S_2\rangle\langle S_3\rangle|^{1/2}$

Когда здесь знак равенства? В случае с импульсом и координатой мы знаем: это когерентные состояния, которым соответствуют гауссовские волновые пакеты:

$$\Psi(q)=Ce^{-\frac{q^2}{4\sigma^2}},$$

$$p(q)=|\Psi|^2=|C|^2\,e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Delta q=\sigma$$

Тогда в импульсном представлении ВФ - это Фурье-образ

$$\Psi(k) = \int dq e^{-ikq} C e^{-\frac{q^2}{4\sigma^2}} = C' e^{-\sigma^2 k^2},$$

$$p(k) = |\Psi(k)|^2 = |C'|^2 e^{-2\sigma^2 k^2}$$

$$\Delta k = 1/2\sigma, \Delta p = \hbar/2\sigma,$$

$$\Delta q \Delta p = \hbar/2$$

Состояния с минимальной неопределенностью, для которых соотношение неопределенностей превращается в равенство, называются в квантовой оптике ***intelligent states.*** Сюда относятся, как видим, когерентные состояния, а также ***обобщенные когерентные состояния***.

Другие квантовые состояния

Пока речь шла только об однофотонных состояниях. Рассмотрим некоторые другие.

1. Когерентные состояния в двух ортогональных поляризационных модах.
$\left|\Psi\right\rangle = \left|\alpha\right\rangle_x \otimes \left|\beta\right\rangle_y$.
Параметры Стокса:

$$\left\langle S_0 \right\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2,$$

$$\left\langle S_1 \right\rangle = |\alpha|^2 - |\beta|^2,$$

$$\left\langle S_2 \right\rangle = 2\,\mathrm{Re}(\alpha^* \beta),$$

$$\left\langle S_3 \right\rangle = 2\,\mathrm{Im}(\alpha^* \beta).$$

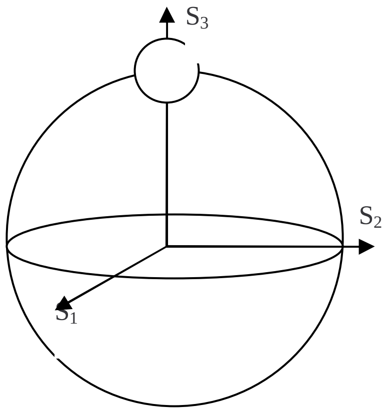
Найдем дисперсии переменных Стокса.

$$\left\langle S_1^{\,2} \right\rangle = (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2; \quad \Delta S_1^{\,2} = \left\langle S_0 \right\rangle$$

$$\left\langle S_2^{\,2} \right\rangle = (\alpha^* \beta + \beta^* \alpha)^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2; \quad \Delta S_2^{\,2} = \left\langle S_0 \right\rangle$$

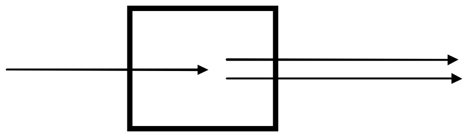
$$\left\langle S_3^{\,2} \right\rangle = -(\alpha^* \beta - \beta^* \alpha)^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2; \quad \Delta S_3^{\,2} = \left\langle S_0 \right\rangle$$

На сфере Пуанкаре это состояние можно изобразить «шариком» с радиусом $\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$ на расстоянии $|\alpha|^2 + |\beta|^2$ от начала координат.



Это состояние будет ***intelligent*** по отношению к паре переменных S_1, S_2, если $\alpha = \alpha_0$, $\beta = i\alpha_0$, α_0 - вещественное число.

2. Фоковские состояния в двух ортогональных поляризационных модах – это и есть ***обобщенные когерентные состояния***
$|\Psi\rangle=|N_a,N_b\rangle$, $N_a+N_b=N=const$
N_a, N_b- целые числа.
Например, двухфотонный свет.



Тип I: $|2,0\rangle$ или $|0,2\rangle$
Тип II: $|1,1\rangle$. (Из двух ортогонально поляризованных бифотонов типа I можно синтезировать бифотон типа II).
Найдем параметры Стокса для этого состояния. Причем существенно, что это добавка к вакууму.
$<S_1>=\{<0,0|+c^*<1,1|\}\{a^+a-b^+b\}\{|0,0>+c|1,1>\}=|c|^2$,
$<S_2>=\{<0,0|+c^*<1,1|\}\{a^+b+b^+a\}\{|0,0>+c|1,1>\}= \{<0,0|+c^*<1,1|\}c\sqrt{2}\{|2,0>+|0,2>\}=0$
$<S_3>=0$ (аналогично).
Степень поляризации равна нулю. Но, как уже говорилось, в этом состоянии наблюдается скрытая поляризация - в четвертом порядке по полю. Об этом - через несколько лекций.

Поляризационное состояние одномодовых бифотонов.

Ранее мы рассматривали состояние ***одного*** фотона в двух поляризационных модах. Теперь мы рассмотрим состояние ***двух одинаковых*** (по спектру и направлению) фотонов в двух поляризационных модах.

Произвольное поляризационное состояние такого ***бифотона*** (коррелированной пары фотонов) имеет вид

$$|\psi\rangle = c_1|2,0\rangle + c_2|1,1\rangle + c_3|0,2\rangle, \qquad (*)$$

где символ $|m, n\rangle$ обозначает состояние с m фотонами в поляризационной моде x и n фотонами в поляризационной моде y. Первое и третье слагаемые могут быть получены в эксперименте при СПР с синхронизмом типа I, а второе - при СПР с синхронизмом типа II. В силу нормировки, $|c_1|^2+|c_2|^2+|c_3|^2=1$, и несущественности общей фазы волновой функции, состояние (*) может быть охарактеризовано четырьмя вещественными параметрами d_1, d_3, φ_2, φ_3, $c_i=d_i\exp\{i\varphi_i\}$, $\varphi_1=0$, $\Sigma d_i^2=1$, $\varphi_2,\varphi_3\in[0,2\pi]$. Аналогично тому, как поляризационное состояние классического поляризованного света может быть обозначено точкой на сфере Пуанкаре (сфера S^2 в пространстве R^3), состояние двухфотонного света (*) можно обозначить точкой на четырехмерной сфере (S^4) в пятимерном пространстве (R^5). Соответственно, вектор $\mathbf{e}=(c_1, c_2, c_3)$ можно назвать ***вектором поляризации*** бифотона.

Можно предложить более наглядный способ геометрической интерпретации поляризационного состояния двухфотонного света. Можно показать, что вектор состояния (*) однозначно представим как

$$|\Psi\rangle = \frac{a^\dagger(\vartheta,\varphi)a^\dagger(\vartheta',\varphi')|vac\rangle}{\left\| a^\dagger(\vartheta,\varphi)a^\dagger(\vartheta',\varphi')|vac\rangle \right\|}. \qquad (**)$$

Здесь $a^\dagger(\vartheta,\varphi)$ и $a^\dagger(\vartheta',\varphi')$ - операторы рождения фотонов в произвольных поляризационных модах; например, $a^\dagger(\vartheta,\varphi) = \cos\frac{\vartheta}{2}a_x^\dagger + e^{i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2}a_y^\dagger$, $a_{x,y}^\dagger$ - операторы рождения фотонов в линейных поляризационных модах x,y, $\varphi,\varphi'\in[0,2\pi]$ и $\vartheta,\vartheta'\in[0,\pi]$ - соответственно, азимутальный и полярный углы на сфере Пуанкаре. Без учета нормировки норма вектора состояния (**) менялась бы от единицы (для случая, когда $a^\dagger(\vartheta,\varphi)$ и $a^\dagger(\vartheta',\varphi')$ ортогональны) до двух (для случая, когда $a^\dagger(\vartheta,\varphi)$ и $a^\dagger(\vartheta',\varphi')$ совпадают). В координатах θ,θ', φ, φ' выражение для квадрата нормы может быть записано как

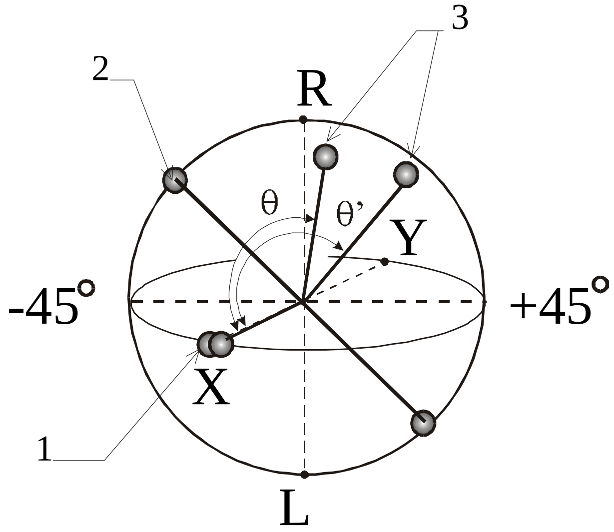
$$|\Psi|^2 = 1+\cos^2\left(\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}\right) - \sin\vartheta\sin\vartheta'\sin^2\left(\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right). \qquad (***)$$

Преобразования от $\{\vartheta,\vartheta', \varphi, \varphi'\}$ к $\{d_1, d_3, \varphi_2, \varphi_3\}$ имеют достаточно сложный вид и не будут здесь приводиться; достаточно запомнить, что они однозначны.

Таким образом, произвольное состояние вырожденного бифотонного поля можно изобразить двумя точками на сфере Пуанкаре и задать четырьмя параметрами θ, θ', φ, φ'. Например, состояние $|2,0\rangle$ изображается «двойной» точкой на сфере, а состояние $|1,1\rangle$ - двумя точками на противоположных концах одного диаметра (см. рис.).

При этом вектор Стокса для бифотонного света оказывается равным сумме векторов Стокса **S**, **S′** для состояний $a^{\dagger}(\vartheta,\varphi)|vac\rangle$ и $a^{\dagger}(\vartheta',\varphi')|vac\rangle$, нормированной на величину $|\Psi|^2$, а степень поляризации определяется косинусом половины угла α между векторами **S**, **S′**:

$$P = \frac{2\cos(\alpha/2)}{1+\cos^2(\alpha/2)}.$$



1- состояние $|2,0\rangle$

2- состояние $|1,1\rangle$

3- произвольное состояние (*).