Лекция 4

Однофотонный волновой пакет. Операторы Стокса. Их собственные векторы и собственные значения. Измерение параметров Стокса для квантового состояния.

Поляризация для квантового состояния

Будем говорить об однофотонном состоянии; для одной моды это $a^+|0\rangle\equiv|1\rangle$. Это идеализация (нет чистых фоковских состояний, есть однофотонные волновые пакеты).

Однофотонный волновой пакет:

$$|\Psi(t)\rangle \equiv \int dk f(k) e^{-i\omega(k)t} a_k^+ |0\rangle.$$

Один фотон (точно!) «размазан» по спектру (частот и волновых векторов).

Но мы все же будем использовать идеализированное состояние одного фотона в двух поляризационных модах:

$|\psi\rangle\equiv\alpha|x\rangle+\beta|y\rangle\equiv\alpha|1,0\rangle+\beta|0,1\rangle$ - фотон с определенной поляризацией.
$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$,
$|x\rangle\equiv|1,0\rangle\equiv|1\rangle_x\otimes|0\rangle_y$

(прямое произведение $X\otimes Y$ - множество всех упорядоченных пар (x,y) таких, что $x\in X$, $y\in Y$.)

Т.о., мы задали ***вектор состояния*** $|\Psi\rangle=\alpha|x\rangle+\beta|y\rangle$. Сейчас он задан ***в линейном базисе***. Но можно записать его и в циркулярном базисе, $\alpha|+\rangle+\beta|-\rangle$.

Пара чисел (α,β) – поляризационный кубит - определяет состояние; как и в классике, состояние можно изобразить точкой на сфере Пуанкаре.
Параметризация: $\alpha=\cos(\theta/2)$, $\beta=e^{i\varphi}\sin(\theta/2)$.

Операторы
Вместо a_x, a_y пишем a, b
Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям
$[a,a^+]=[b,b^+]=1$,
$[a,b]=[a,b^+]=\ldots=0$

Матрица когерентности выражается через вторые моменты вида $\langle a^+a\rangle$, $\langle a^+b\rangle$, ...
Матрицы Джонса вводятся для операторов; это представление Гейзенберга.
(О представлении Шредингера будет рассказано позже).

Операторы Стокса:

$S_0\equiv a^+a+b^+b$
$S_1\equiv a^+a-b^+b$
$S_2\equiv a^+b+b^+a$
$S_3\equiv(a^+b-b^+a)/i$
Это эрмитовы операторы.

Параметры Стокса - их средние значения. Найдем их для однофотонного состояния.

$<S_0>=\alpha^*<x|+\beta^*<y|\{ a^+a+b^+b\}\alpha|x\rangle+\beta|y\rangle=|\alpha|^2+|\beta|^2=1,$
$<S_1>=|\alpha|^2-|\beta|^2=\cos\theta$
$<S_2>=\alpha^*<x|+\beta^*<y|\{ a^+b+b^+a\}\alpha|x\rangle+\beta|y\rangle=2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)=\sin\theta\cos\varphi$
$<S_3>=\alpha^*<x|+\beta^*<y|(\{ a^+b-b^+a\}/i)\alpha|x\rangle+\beta|y=2\mathrm{Im}(\alpha^*\beta)=\sin\theta\sin\varphi.$

Так что $S_0=1$, $S_1^2+S_2^2+S_3^2=1$, P=1.
Заметим, что операторы a и b вводились с определенной нормировкой. Кроме того, мы рассматриваем однофотонные состояния. Поэтому параметры Стокса оказались нормированы.

Однофотонное состояние всегда поляризовано!
Далее будет рассмотрено двухфотонное состояние - оно окажется неполяризованным во втором порядке по полю (все параметры Стокса будут равны
нулю).

Операторы Стокса действуют на волновую функцию однофотонного состояния так:

$S_0|\psi\rangle\equiv(a^+a+b^+b)(\alpha|x\rangle+\beta|y\rangle)=\alpha|x\rangle+\beta|y\rangle$
$S_1|\psi\rangle\equiv(a^+a-b^+b)(\alpha|x\rangle+\beta|y\rangle)=\alpha|x\rangle-\beta|y\rangle$
$S_2|\psi\rangle\equiv(a^+b+b^+a)(\alpha(|x\rangle+\beta|y\rangle)=\alpha|y\rangle+\beta|x\rangle$
$S_3|\psi\rangle\equiv-i(a^+b-b^+a)(\alpha|x\rangle+\beta|y\rangle)=i\alpha|y\rangle-i\beta|x\rangle$

Или, в матричном виде,

$$\hat{S}_1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix},\hat{S}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\sigma_z,$$

$$\hat{S}_2\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix},\hat{S}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\sigma_x,$$

$$\hat{S}_3\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\beta\\ -i\alpha\end{pmatrix},\hat{S}_3=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}=\sigma_y,$$

$$\hat{S}_0\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\hat{S}_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I.$$

(матрицы Паули)

Таким образом, ***операторы Стокса*** аналогичны компонентам ***оператора спина***, а вектор состояния однофотонного поляризованного света - спинору, т.е. спиновой части ВФ для частицы со спином 1/2. (Значит ли это, что спин фотона 1/2?)

Собственные значения и векторы операторов Стокса.

$S_0|\psi\rangle=s_0|\psi\rangle$
$\alpha|1,0\rangle+\beta|0,1\rangle=s_0\alpha|1,0\rangle+s_0\beta|0,1\rangle$
$s_0=1$

$S_1|\psi\rangle=s_1|\psi\rangle$
$\alpha|1,0\rangle-\beta|0,1\rangle=s_1\alpha|1,0\rangle+s_1\beta|0,1\rangle$

или α=0, β=1, s_1= -1,
или α=1, β=0, s_1=1.
Линейная поляризация по x и y

$S_2|\psi\rangle=s_2|\psi\rangle$
$\beta|1,0\rangle+\alpha|0,1\rangle=s_2\alpha|1,0\rangle+s_2\beta|0,1\rangle$
или $\alpha=1/\sqrt{2}$, $\beta=1/\sqrt{2}$, s_2=1,
или $\alpha=1/\sqrt{2}$, $\beta=-1/\sqrt{2}$, s_2= -1.
Линейная поляризация под +45° и -45°

$S_3|\psi\rangle=s_3|\psi\rangle$
$i\alpha|0,1\rangle-i\beta|1,0\rangle=s_3\alpha|1,0\rangle+s_3\beta|0,1\rangle$
или $\alpha=1/\sqrt{2}$, $\beta=i/\sqrt{2}$, s_3=1,
или $\alpha=1/\sqrt{2}$, $\beta=-i/\sqrt{2}$, s_3= -1
Правая и левая циркулярная поляризация

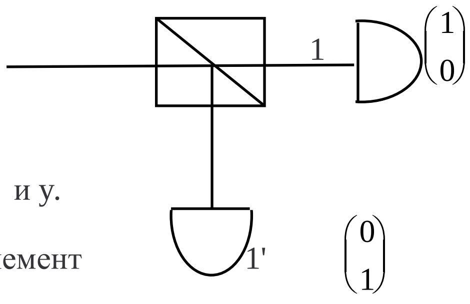
***Итак,* $|s_k|$=1**

Можно ли измерить поляризацию фотона?

Собственные векторы S_1, S_2, S_3 - это, соответственно, состояния
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\i/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-i/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Значит, для измерения параметров Стокса надо установить элементы,

проецирующие на эти состояния (векторы).



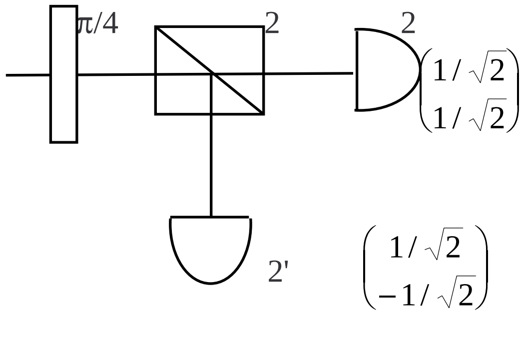
1) Например, призма Глана проецирует
на состояния с линейной поляризацией по x и y.

(Можно вспомнить еще поляроид. Но это элемент

с поглощением, и соответствующее преобразование
неунитарно.)
Такая конструкция измеряет s_1.

2) Чтобы измерить s_2, надо призму Глана

повернуть на 45 градусов (повернуть базис).



Но мы вместо этого используем ротатор,
как мы и делали в классике. Это

то же самое, что повернуть призму Глана.

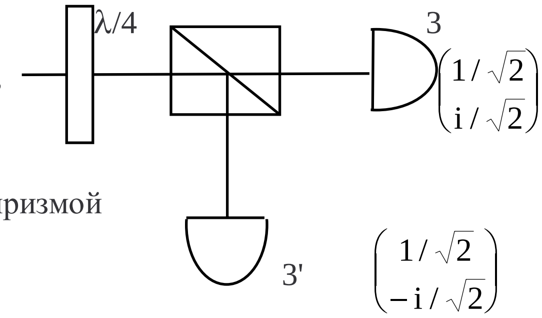
Эта конструкция измеряет s_2.

3) А чтобы измерить s_3, надо поставить

“циркулярную поляризационную призму”

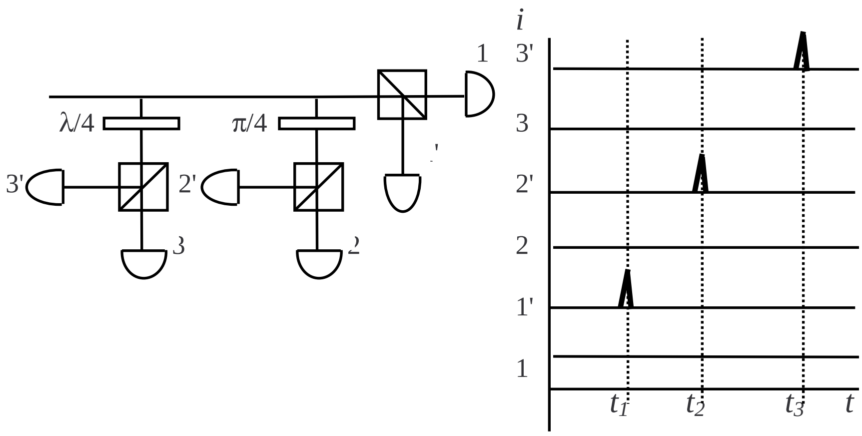
элемент, выделяющий состояния $|+\rangle$ и $|-\rangle$.
Но это то же самое, что поставить перед призмой

Глана пластинку $\lambda/4$.



(Это становится совсем очевидно, если вспомнить об обратимости хода световых пучков).

И, конечно, один фотон вызовет только один щелчок детектора.



Момент t_1 - мы знаем, что ***фотон поляризован не по x***
Момент t_2 - мы знаем, что ***фотон поляризован не под +45***
Момент t_3 - мы знаем, что ***фотон поляризован не правоциркулярно***

И больше мы ничего не узнали.