Лекция 3

Аналогия со сферой Блоха. Матрицы Мюллера. Преобразования вектора Стокса фазовыми пластинками и ротаторами. Измерение параметров Стокса.

Аналогия со сферой Блоха.

Вспомним, как описывается квантовое состояние двухуровневой системы. Если состояние чистое, то вектор состояния $\Psi=\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2=\alpha|g>+\beta|e>$, а матрица плотности имеет вид $\rho=\begin{pmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{12}* & \rho_{22}\end{pmatrix}$, где $\rho_{11} = |\alpha|^2$, $\rho_{22} = |\beta|^2$, $\rho_{12} = \alpha^*\beta$.

Вектор Блоха выражается через матрицу плотности как $\mathbf{R}=\{2\mathrm{Re}\rho_{21}; 2\mathrm{Im}\rho_{21}; \rho_{11}-\rho_{22}\}$.
Поэтому для чистого состояния он будет иметь компоненты $\mathbf{R}=\{2\mathrm{Re}\alpha^*\beta; 2\mathrm{Im}\alpha^*\beta; |\alpha|^2-|\beta|^2\}$.

То есть вид вектора Блоха – такой же, как у вектора Стокса
$\boldsymbol{\sigma}=\{|\alpha|^2-|\beta|^2; 2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta); 2\mathrm{Im}(\alpha^*\beta)\}$
Соответствие: $R_1 \to\sigma_2$, $R_2\to\sigma_3$, $R_3\to\sigma_1$. Имеется аналогия между ротатором и импульсами резонансного поля в нестационарной оптике.
Когда состояние двухуровневой системы будет смешанным? Когда α и β флуктуируют. Тогда матрица плотности будет состоять из корреляторов. Тогда $|R|<1$. Это аналогично тому, как для частично поляризованного света вектор Стокса движется со временем, и в среднем $\sigma<1$.

Матрицы Мюллера

Между $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{e}$ есть связь:
$\sigma_1\equiv|\alpha|^2-|\beta|^2=\cos\theta$
$\sigma_2\equiv2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)=\sin\theta\cos\phi$
$\sigma_3\equiv2\mathrm{Im}(\alpha^*\beta)=\sin\theta\sin\varphi$.

Как преобразуется $\boldsymbol{\sigma}$ под действием фазовой пластинки?
$\alpha'=t\alpha+r\beta$;
$\beta'=-r^*\alpha+t^*\beta$;

$\sigma_1'\equiv|\alpha'|^2-|\beta'|^2$;
$\sigma_2'\equiv2\mathrm{Re}(\alpha'^*\beta')$;
$\sigma_3'\equiv2\mathrm{Im}(\alpha'^*\beta')$.

Проделав все выкладки, можно получить: $\boldsymbol{\sigma}'=\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}$, где

$$M=\begin{pmatrix}|t|^2-|r|^2 & 2\,\mathrm{Re}(t*r) & -2\,\mathrm{Im}(t*r)\\ -2\,\mathrm{Re}(tr) & \mathrm{Re}(t^2-r^2) & \mathrm{Im}(t^2+r^2)\\ 2\,\mathrm{Im}(tr) & \mathrm{Im}(r^2-t^2) & \mathrm{Re}(t^2+r^2)\end{pmatrix}$$

Эти матрицы называются матрицами Мюллера – они описывают преобразование вектора Стокса линейными поляризационными элементами без потерь. Строго говоря, настоящие матрицы Мюллера 4x4. Но у нас нет потерь, и S_0=const. Поэтому у нас матрицы Мюллера – 3x3.

Как действие фазовых пластинок и ротаторов соответствует поворотам вектора Стокса?
(θ, φ) -> (θ’, φ’)
σ’=Mσ
Это унитарное преобразование в трехмерном евклидовом векторном пространстве. Оно сохраняет длины векторов и углы (скалярное произведение). Т.к. оно унимодулярно, то также сохраняются векторное и смешанное произведения (правая тройка векторов остается правой). Такие преобразования называются ***собственными вращениями*** (без отражений). Матрицы 3x3, но за счет связей задаются тремя числами. Это могут быть углы Эйлера. Или - задается угол поворота α и ось **C**, вокруг которой производится поворот. Эта ось - собственный вектор матрицы M, инвариант преобразования .

Угол: $\cos\alpha=(\mathrm{Tr}(M)-1)/2=(m_{11}+m_{22}+m_{33}-1)/2$

Направляющие косинусы: $\left| c_1 = \dfrac{m_{32}-m_{23}}{2\sin\alpha}; c_2 = \dfrac{m_{13}-m_{31}}{2\sin\alpha}; c_{31} = \dfrac{m_{21}-m_{12}}{2\sin\alpha} \right|$

Найдем их для матрицы M.

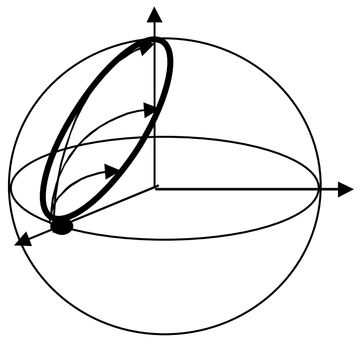
$$c_1 = \frac{-\mathrm{Im}(t^2)}{\sin 2\delta}; c_2 = \frac{-\mathrm{Im}(tr)-\mathrm{Im}(t^*r)}{\sin 2\delta}; c_{31} = \frac{-\mathrm{Re}(tr)-\mathrm{Re}(t^*r)}{\sin 2\delta}; \alpha = 2\delta .$$

Фазовая пластинка

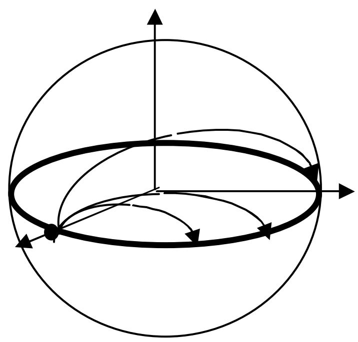
C=(-cos2χ; -sin2χ; 0); α=2δ.
Причем поворот - по часовой стрелке, если смотреть по оси C. Или, что то же самое, поворот против часовой стрелки на угол 2δ, если смотреть по оси
(cos2χ, sin2χ, 0).

Т.е., действие фазовой пластинки с фазой δ=πΔnl/λ и осью, ориентированной под углом χ, есть поворот вектора Стокса на угол 2δ вокруг оси, лежащей в плоскости S_1, S_2 под углом 2χ к S_1. Эта ось **C** - инвариант пластинки; свет с соответствующей поляризацией остается после пластинки таким же. Поскольку мы рассматриваем линейные пластинки (у которых собственный базис - линейный), то ось лежит в экваториальной плоскости.

Например, из x- поляризации пластинкой λ/4 получим правую циркулярную поляризацию, если пластинка ориентирована под углом $\pi/4$. Если она ориентирована под меньшим углом, то поляризация станет эллиптической, причем увеличение эллиптичности (широты) будет сопровождаться поворотом оси эллипса (изменением долготы).
Можно показать область, на сфере, «доступную» для этой пластинки.



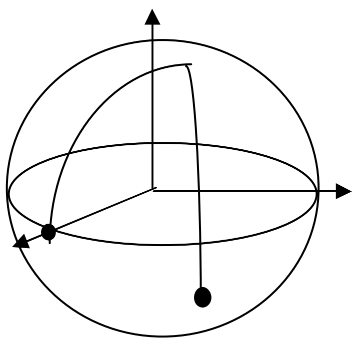
Для $\lambda/2$ «доступным» оказывается весь экватор (если исходная поляризация – x).



Можно рассмотреть и пластинку, для которой оптическая ось ζ не перпендикулярна волновому вектору k. Но тогда нужно спроецировать обе компоненты вектора поляризации на плоскость (ζ, k) и на перпендикуляр к ней. В результате все получится так же, как и для пластинки с $\zeta \perp k$, но в роли угла χ будет выступать угол между x и проекцией ζ на плоскость (x,y), а в роли n_e - эффективный показатель преломления n_{eff}.

«Активная» и «пассивная» точки зрения: можно рассматривать повороты точки на сфере, а можно сферу (систему координат) поворачивать относительно точки.

Если поставить друг за другом две пластинки, то они осуществляют композицию преобразований:



Можно ли осуществить любое преобразование одной пластинкой? Нет, т.к. у одной пластинки всего два параметра. В то же время, любые две точки на сфере Пуанкаре можно совместить поворотом вокруг какой-либо оси, лежащей в экваториальной плоскости. Действительно*, проведем через эти точки плоскость ξ, перпендикулярную экваториальной. В сечении будет окружность (любое сечение сферы - окружность), а ее центр (по симметрии) будет лежать на прямой, перпендикулярной плоскости ξ и проходящей через центр сферы. Это и будет ось поворота. Данные два утверждения не противоречат друг другу, т.к. соединить произвольные две точки еще не значит задать произвольный поворот. Ведь две точки можно соединить *различными поворотами*, и в этом причина эффектов, связанных с геометрической фазой. Бывают, между прочим, эллиптические пластинки, у которых собственные волны эллиптически поляризованы. Если включить их в рассмотрение, то любое преобразование на сфере Пуанкаре осуществимо фазовой пластинкой.

* Доказательство придумала Т.В.Долгова, когда слушала этот курс

Ротатор

$$D=\begin{pmatrix}\cos\delta & \sin\delta\\ -\sin\delta & \cos\delta\end{pmatrix}$$ (в линейном базисе).

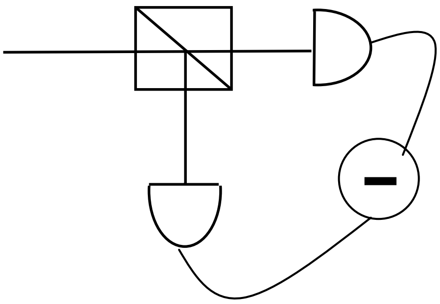
Посчитаем параметры поворота, который он осуществляет. Получим

$\alpha=2\delta$; $c_1=c_2=0$; $c_3=-1$

Получаем поворот вокруг оси S_3 на угол 2δ.
Ротатор - это циркулярная пластинка.

Измерение параметров Стокса

Рассмотрим такую схему. Поляризационный светоделитель пропускает x- поляризацию и отражает y-поляризацию. Соответствующие пучки направляются на два детектора, и измеряется разность их фототоков.



1) без пластинок. $i_x-i_y=K(|\alpha|^2-|\beta|^2)=K\sigma_1$; $i_x+i_y=K(|\alpha|^2+|\beta|^2)=K$; $\sigma_1=(i_x-i_y)/(i_x+i_y)$

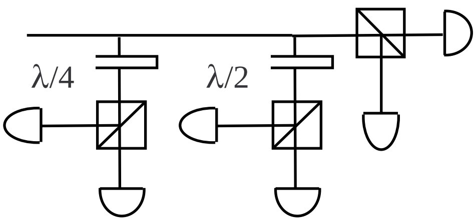
2) ставим ротатор, который поворачивает плоскость поляризации на 45°. На сфере Пуанкаре это поворот на 90°; $\alpha=90°$; $\delta=45°$.

Теперь σ_1 и σ_2 поменялись местами, и измеряется σ_2.

3) ставим пластинку $\lambda/4$ под углом $\pi/4$; меняются местами σ_1 и σ_3. Измеряется σ_3.

Увидим флуктуации, если они достаточно медленные. Среднее значение разности фототоков будет давать нам параметр Стокса $\langle\sigma_1\rangle=\langle i_x-i_y\rangle$.

Можно ли измерить одновременно σ_1, σ_2, σ_3? В классике – можно. Для этого нужно отщепить от пучка часть и померить для нее σ_1, отщепить еще часть и померить σ_2, для оставшейся части померить σ_3. Или в другом порядке, это неважно. Например, так:



Но для 1 фотона нельзя измерить даже один из параметров Стокса.