Лекция 2

Векторы Джонса для разных типов поляризации. Фазовые пластинки и ротаторы, их матрицы Джонса. Аналогия со светоделителем. Зеркало. Измерение вектора Джонса. Параметры и вектор Стокса. Сфера Пуанкаре.

Мы задали вектор Джонса. Его компоненты имеют смысл применительно к какому-то базису. И базис надо выбирать наиболее удобным образом.

Вопрос: сколько вещественных чисел определяют вектор Джонса?

Несколько примеров вектора Джонса. (Все в линейном базисе x-y.)

Правая круговая поляризация:

$$\vec{e}_+ = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Левая круговая поляризация:

$$\vec{e}_- = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Линейная под 45°:

$$\vec{e}_D = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Поляризационные элементы без потерь (ротаторы и фазовые пластинки) осуществляют преобразование вектора Джонса, представимое унитарными и унимодулярными матрицами 2x2 (одно из представлений группы SU(2)):

e’=D**e**

Фазовая пластинка (***retardation plate***) - кристаллическая пластинка без потерь с двупреломлением $\Delta n=n_o-n_e$ и толщиной l. У нее есть собственный базис - направления вдоль оптической оси ζ и перпендикулярно ей. (Считаем, что волновой вектор перпендикулярен ζ.) Обозначим базис пластинки $\{x_0,y_0\}$, и пусть он повернут на угол χ относительно исходного базиса $\{x,y\}$. Пусть ось ζ параллельна x_0.

Преобразование базиса осуществляется вещественной матрицей поворота:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \cos\chi & \sin\chi \\ -\sin\chi & \cos\chi \end{pmatrix}$$

Координаты вектора Джонса в собственном базисе:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_0 = V\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad V = A^* = A.$$

Преобразование вектора Джонса в пластинке:

$$\alpha_0 \to \alpha_0 e^{ik_e l}, \beta_0 \to \beta_0 e^{ik_o l}, \quad k_e = 2\pi n_e/\lambda, \quad k_o = 2\pi n_o/\lambda$$

На выходе из пластинки вектор Джонса в собственном базисе пластинки будет иметь вид

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_0^{\prime}=D_0\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_0\ e^{i\pi(n_o+n_e)l/\lambda},D_0=\begin{pmatrix}e^{i\delta} & 0\\ 0 & e^{-i\delta}\end{pmatrix},\delta=\frac{\pi\Delta nl}{\lambda}=\frac{\Delta kl}{2}.$$

Здесь $\Delta n=n_e-n_o$.

Например, для пластинки $\lambda/4$ $\delta=\pi/4$.

Другими словами, матрица Джонса в собственном базисе пластинки диагональна.

Фазовый множитель для вектора Джонса не имеет значения. Переходим опять к старому базису. В нем матрица Джонса будет иметь вид

$D=A^{-1}D_0A=A^{+}D_0A;$

$$D_0A=\begin{pmatrix}e^{i\delta} & 0\\ 0 & e^{-i\delta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\chi & \sin\chi\\ -\sin\chi & \cos\chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{i\delta}\cos\chi & e^{i\delta}\sin\chi\\ -e^{-i\delta}\sin\chi & e^{-i\delta}\cos\chi\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}\cos\chi & -\sin\chi\\ \sin\chi & \cos\chi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\delta}\cos\chi & e^{i\delta}\sin\chi\\ -e^{-i\delta}\sin\chi & e^{-i\delta}\cos\chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\delta+i\sin\delta\cos2\chi & i\sin\delta\sin2\chi\\ i\sin\delta\sin2\chi & \cos\delta-i\sin\delta\cos2\chi\end{pmatrix},$$

или

$$D=\begin{pmatrix}t & r\\ -r* & t*\end{pmatrix},\quad t=\cos\delta+i\sin\delta\cos2\chi,\quad r=i\sin\delta\sin2\chi.$$

Замечание: Часто пишут не **e**'=D**e**, а **e**'=D^***e**. Это означает просто изменение знака δ.

$D=\begin{pmatrix}t & r\\ -r* & t*\end{pmatrix}$ - это общий вид матрицы Джонса для любого линейного преобразователя поляризации без потерь. Здесь имеется аналогия со светоделителем. Для светоделителя поля в выходных модах связаны с полями во входных модах тем же преобразованием:

$\begin{pmatrix}E_1'\\ E_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t & r\\ -r* & t*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_1\\ E_2\end{pmatrix}$, где матрица $\begin{pmatrix}t & r\\ -r* & t*\end{pmatrix}$ также соответствует представлению группы SU2. Здесь унитарность обусловлена отсутствием потерь, а унимодулярность (равенство нулю определителя) устанавливается «руками»: просто общая фаза поля (или ВФ) несущественна.

Если пластинок много, матрицы надо перемножать: $D=D_1D_2.....D_n$.

Можно, кроме пластинки, рассмотреть ***ротатор*** - устройство, поворачивающее плоскость поляризации. Это может быть ячейка Фарадея, раствор сахара, гиротропный кристалл или другое вещество с *оптической активностью*. Такое устройство имеет собственный базис - циркулярный, и оно вносит фазовые сдвиги в e_+ и e_-. В этом базисе его матрица Джонса имеет вид

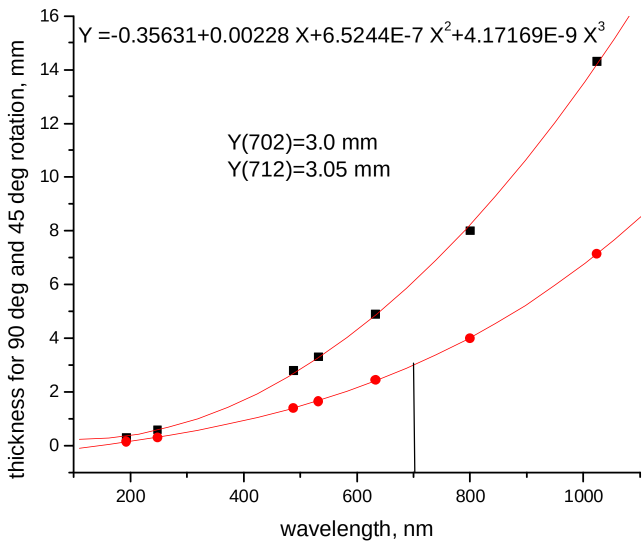
$$D_0 = D_{+-} = \begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix}.$$ Тогда в линейном базисе $D=V^{-1}D_0V=A^TD_0A^*$, где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$ так что $$D = \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\delta \\ -\sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix}$$ - матрица поворота.

Например, линейная поляризация по x переходит в $\begin{pmatrix} \cos\delta \\ -\sin\delta \end{pmatrix}$, т.е. поворачивается на угол δ.

Легко проверить, что матрица ротатора также относится к SU2-группе.

Пример: кристаллический кварц, вырезанный вдоль оптической оси, обладает значительной оптической активностью. На рисунке: толщина кварцевой пластинки, при которой поворот плоскости поляризации составляет 45 градусов (красные точки) и 90 градусов (черные точки), в зависимости от длины волны.



Примеры преобразования поляризации пластинками.

Пластинка λ/4 (значит, δ=π/4) под углом χ=π/4. Ее матрица $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Вместо первоначального вектора $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ получим

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}' = D\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{i\beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

1. На входе $\vec{e}_+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Тогда $|\alpha'|^2=0$. Правая циркулярная поляризация стала линейной по y.

2. На входе $\vec{e}_- = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. $|\alpha'|^2=1$. Левая циркулярная поляризация стала линейной по x.

3. На входе $\vec{e}_D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. $|\alpha'|^2=1/2$. Линейная поляризация стала - ? Осталась такой же. Это направление для пластинки - собственное.

Вопрос: чем отличается вектор Джонса для поляризованного и неполяризованного света? Ответ: ничем, потому что в любой момент времени свет всегда поляризован. Вектор Джонса не содержит усреднения.

Рассмотрим теперь другой способ описания поляризации - через вторые моменты. Так мы опишем и частично поляризованный свет (вектор Джонса его не описывает).

Параметры Стокса (Stokes, 1852)

Мгновенные параметры Стокса:

$S_0 \equiv |E_x|^2+|E_y|^2$
$S_1 \equiv |E_x|^2-|E_y|^2$
$S_2 \equiv 2\mathrm{Re}(E_x^* E_y)$
$S_3 \equiv 2\mathrm{Im}(E_x^* E_y)$.
Это 4 вещественных числа (вместо 2 комплексных). Но есть связь:
$S_1^2+ S_2^2+ S_3^2=S_0^2$.

Значит, можно ввести ***нормированный вектор Стокса***

$\boldsymbol{\sigma} \equiv \mathbf{S}/S_0$, $\mathbf{S} \equiv \{S_1, S_2, S_3\}$. Это ***мгновенный*** вектор Стокса!

Он так связан с вектором Джонса:

$\sigma_1=|\alpha|^2-|\beta|^2$; $\sigma_2=2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)$; $\sigma_3=2\mathrm{Im}(\alpha^*\beta)$.

Средние значения компонент - ***параметры Стокса***

$\langle S_0\rangle \equiv \langle |E_x|^2\rangle+\langle |E_y|^2\rangle=I_x+I_y$
$\langle S_1\rangle \equiv \langle |E_x|^2\rangle-\langle |E_y|^2\rangle=I_x-I_y$
$\langle S_2\rangle \equiv 2\mathrm{Re}\langle E_x^* E_y\rangle=2\mathrm{Re}G_{xy}$
$\langle S_3\rangle \equiv 2\mathrm{Im}\langle E_x^* E_y\rangle=2\mathrm{Im}G_{xy}$.

Заметим, что можно более наглядно выразить компоненты вектора Стокса S_2, S_3. Так как $E_+=(E_x+iE_y)/\sqrt{2}$, $E_-=(E_x-iE_y)/\sqrt{2}$, $E_{45}=(E_x+E_y)/\sqrt{2}$, $E_{-45}=(E_x-E_y)/\sqrt{2}$, то $E_x^*E_y=\{|E_{45}|^2>-<|E_{-45}|^2>\}/2+i\{|E_-|^2-|E_+|^2\}/2\}$. Поэтому

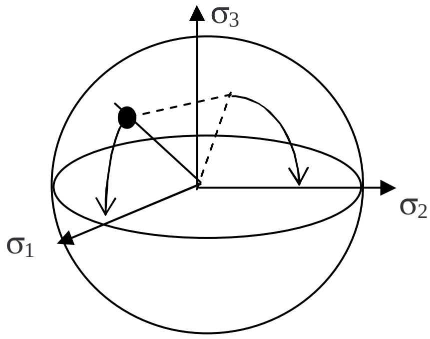
$<S_2>\equiv<|E_{45}|^2>-<|E_{-45}|^2>=I_{45}-I_{-45}$, $<S_3>\equiv<|E_-|^2>-<|E_+|^2>=I_--I_+$.

Через параметры Стокса можно выразить матрицу когерентности:

$$K \equiv \begin{pmatrix} <S_0>+<S_1> & <S_2>+i<S_3> \\ <S_2>-i<S_3> & <S_0>-<S_1> \end{pmatrix}.$$

Сфера Пуанкаре (1892 г.)

Выберем параметризацию для этого единичного вектора:
$\sigma_1=\cos\theta$, $\sigma_2=\sin\theta\cos\varphi$, $\sigma_3=\sin\theta\sin\varphi$. $\theta=0...\pi$, $\varphi=0...2\pi$. Мы задали сферические координаты:



(по сравнению со «стандартной» системой координат, все перевернуто.)

1. Экватор: $\varphi=0$ или π, $\sigma_3=0$. $E_x^*E_y=E_xE_y^*$. Значит, фазы E_x и E_y (α и β) совпадают. Линейная поляризация.
   - $\boldsymbol{\sigma}=(1,0,0)$ x-поляризация
   - $\boldsymbol{\sigma}=(-1,0,0)$ y-поляризация
   - $\boldsymbol{\sigma}=(0,1,0)$ 45°.
2. Полюса.
   - $\boldsymbol{\sigma}=(0,0,1)$ +
   - $\boldsymbol{\sigma}=(0,0,-1)$ -

Вообще, противоположные точки на сфере задают ортогональные поляризационные состояния. На одном меридиане оси эллипсов параллельны.
Со временем точка медленно «блуждает» по сфере (временной подход). Или (ансамблевый подход) имеется много точек на сфере. В обоих случаях надо усреднять.
Например, точка движется в области полюса.
$<S_1>=<S_2>=0$, $<S_3>=0.9$.
Или покрыта вся сфера,
тогда $<S_1>=<S_2>= <S_3>=0$.

Степень поляризации

$$P\equiv\sqrt{<S_1>^2+<S_2>^2+<S_3>^2}/S_0.$$