Лекция 12

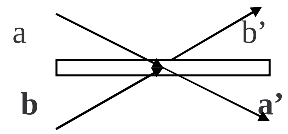
Преобразование вторых и четвертых моментов поля.
Некоторые эксперименты: антикорреляция, скрытая поляризация.
Инварианты четвертого порядка.
Интерференция Брауна-Твисса и двухфотонная интерференция.
Поляризационные преобразования бифотонов.

Преобразование вторых и четвертых моментов поля.

Продолжаем говорить о преобразовании двухмодового света. Светоделитель (beamsplitter) - для пространственных мод - или фазовая пластинка - для поляризационных мод. Оба описываются матрицей Джонса:

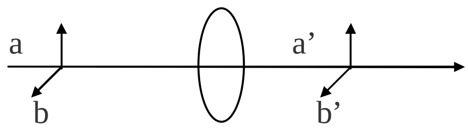
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}' \equiv \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$\mathbf{a}'=\mathbf{D}\mathbf{a}$



В обоих случаях

$$D = \begin{pmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix},$$



но для пластинки коэффициенты «пропускания» и «отражения» можно менять поворотом,

$t=\cos\delta+i\sin\delta\cos2\chi,$ $r=i\sin\delta\sin2\chi.$

Преобразование вторых моментов

Итак, после пластинки или светоделителя

$a'=ta+rb,$ $a^{+}{}'=t^*a^+ + r^*b^+,$
$b'=-r^*a+t^*b.$ $b^{+}{}'=-ra^+ + tb^+.$

По определению,
$N_x \equiv a^+a,\ N_y=b^+b,\ S_+=a^+b,\ S_-=b^+a.$

Тогда

$N_x'=(ta+rb)(t^*a^+ + r^*b^+)=TN_x+RN_y+tr^*S_- + t^*rS_+$
$N_y'=(-r^*a^+ + t^*b^+)(-ra+tb)=TN_y+RN_x-tr^*S_- - t^*rS_+$
$N_x'+N_y'=N_x+N_y$

$S'_+=(ta^+ + rb^+)(-ra+tb)=t^*r^*(N_y-N_x)+(t^*)^2S_+ - (r^*)^2S_-$
$S'_-=tr(N_y-N_x)+t^2S_- - r^2S_+$

Средние (вторые моменты)

$n_x' = Tn_x + Rn_y + tr^* s_- + t^* r s_+$
$n_y' = Tn_y + Rn_x - tr^* s_- - t^* r s_+$

$s'_- = tr(n_y - n_x) + t^2 s_+ - r^2 s_-$
$s'_+ = t^* r^* (n_y - n_x) + t^{*2} s_- - r^{*2} s_+$

Светоделитель перемешивает вторые моменты.

Преобразование четвертых моментов

$G_{xx} \equiv \langle :N_x^2: \rangle$ - аналог КФ Глаубера. Характеризует ***группировку***, или ***флуктуации***.
$G_{xy} \equiv \langle :N_x N_y: \rangle$

Нормированные КФ: $g_{xx} \equiv G_{xx}/n_x^2$, $g_{xy} \equiv G_{xy}/(n_x n_y)$

Вычислим G'_{xx}, G'_{xy}.

$N_x' = (\ ta^+ + rb^+)(\ t^* a + r^* b) = TN_x + RN_y + tr^* S_+ + t^* r S_-$
$N_y' = (\ -r^* a^+ + t^* b^+)(\ -ra + tb) = TN_y + RN_x - tr^* S_+ - t^* r S_-$

$G'_{xx} = T^2 G_{xx} + R^2 G_{yy} + 4TRG_{xy} + t^{*2} r^2 \langle a^{+2} b^2 \rangle + h.c +$ (моменты, содержащие неравные степени операторов рождения и уничтожения)
$G'_{xy} = TR(G_{xx} + G_{yy}) + (T-R)^2 G_{xy} - (t^{*2} r^2 \langle a^{+2} b^2 \rangle + h.c.) +$ аналогично.

Если посчитать, то получится, с учетом всех моментов:

$G'_{xx} + G'_{yy} + 2G'_{xy} = G_{xx} + G_{yy} + 2G_{xy}$, это инвариант.

«Сумма флуктуаций и корреляции сохраняется». Это для любых полей.

Но для полей, у которых $\langle (a^+)^2 ab \rangle = \langle (a^+)^2 b^2 \rangle = \ldots = 0$, можно записать такие преобразования:

$G'_{xx} = T^2 G_{xx} + R^2 G_{yy} + 4TRG_{xy}$
$G'_{xy} = TR(G_{xx} + G_{yy}) + (T-R)^2 G_{xy}$

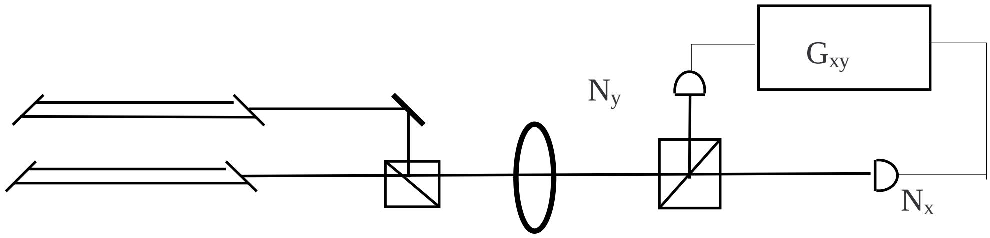
Рассмотрим одинаковые пучки и 50% светоделитель. Пусть для этих пучков будет $\langle a^2 \rangle = \langle b^{+2} \rangle = \ldots = 0$. Тогда
$G_{xx} = G_{yy}$, $R = T = 1/2$

$G'_{xx} = 1/2 G_{xx} + G_{xy}$,
$G'_{xy} = 1/2 G_{xx}$.

Антикорреляция

Видно, что можно добиться подавления корреляции на выходе.

1. Например, независимые лазеры на входе,



$g_{xx}=g_{yy}=g_{xy}=1$,
$g'_{xx}=3/2$,
$g'_{xy}=1/2$. Неклассичность? Нет, это ведь корреляция, а не g_{xx}.

Наглядное классическое объяснение:
$a=e^{i\alpha(t)}$, $b=e^{i\beta(t)}$
$a'=(a+b)/\sqrt{2}=(e^{i\alpha(t)}+e^{i\beta(t)})/\sqrt{2}$,
$b'=(a-b)/\sqrt{2}=(e^{i\alpha(t)}-e^{i\beta(t)})/\sqrt{2}$
$n_a'=1+\cos(\alpha-\beta)$
$n_b'=1-\cos(\alpha-\beta)$
Флуктуации в противофазе.

2. Независимые тепловые источники на входе.

$g_{xx}=g_{yy}=2$,
$g_{xy}=1$.
Тогда
$g'_{xx}=2$
$g'_{xy}=1$. Унитарные преобразования сохраняют гауссову статистику.

3. Двухфотонный свет, получаемый при параметрическом рассеянии

Волновая функция:

$|\psi\rangle=|0,0\rangle+c|1,1\rangle$, $c<<1$

Заметим: это может быть как тип II (бифотонный свет, двухмодовый по поляризации), так и двухмодовый по направлению бифотонный свет типа I.

$G_{xx}=|c|^2\langle 1,1|a^{+2}a^2|1,1\rangle=0$. $g_{xx}=0$
$n_x=n_y=|c|^2*1$
Понятно: однофотонное состояние в каждой моде.

$G_{xy}=\langle 0,0|a^+ab^+b|0,0\rangle+|c|^2\langle 1,1|a^+ab^+b|1,1\rangle=|c|^2$, $g_{xy}=|c|^{-2}>>1$

А на выходе

$G'_{xx}=|c|^2$, $G_{xy}=0$.
$g_{xx}=|c|^{-2}>>1$, $g_{xy}=0$.

Полное подавление корреляции! Сначала свет был полностью коррелированный без флуктуаций, потом - антикоррелированный с пуассоновской группировкой. Как будто "фотоны парами направляются светоделителем в одну или вторую моду" ...

Впервые эксперимент сделал Mandel для типа I (1987), затем его сделали для типа II Shih и Alley.

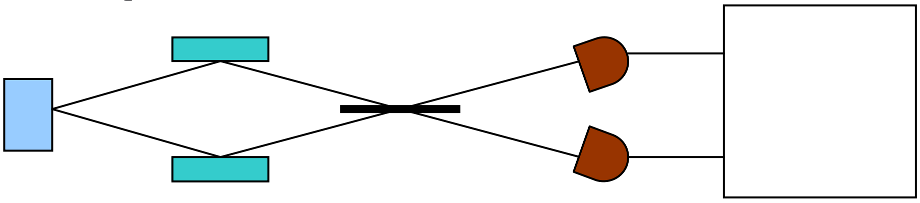
То же можно получить с помощью представления Шредингера.

$|\psi\rangle = a^{+}b^{+}\,|0\rangle$,

$a^{+}=(a'^{+}-b'^{+})/\sqrt{2}$,
$b^{+}=(a'^{+}+b'^{+})/\sqrt{2}$
(обратные преобразования),

$|\psi\rangle = (1/2)(a'^{+}-b'^{+})(a'^{+}+b'^{+})|0,0\rangle=(1/2)(a'^{+2}-b'^{+2})\,|0,0\rangle=(1/\sqrt{2})(\,|2,0\rangle+|0,2\rangle)$.

Вот и получается, что состояние стало двухфотонным в каждой моде.
Схема эксперимента Манделя:



Антикорреляция - один из центральных эффектов в квантовой оптике. Он был использован Chiao (1992) для измерения групповых задержек с фемтосекундным разрешением. (Разрешение определяется шириной провала, т.е. обратной шириной спектра параметрического рассеяния.) Тот же эффект используется для экспериментальной реализации квантовой телепортации (1997).

Скрытая поляризация

Опять рассмотрим двухмодовый свет - по поляризации или направлению.
Теперь пусть T, R - переменные (проще всего это сделать для поляризационных мод и фазовой пластинки).

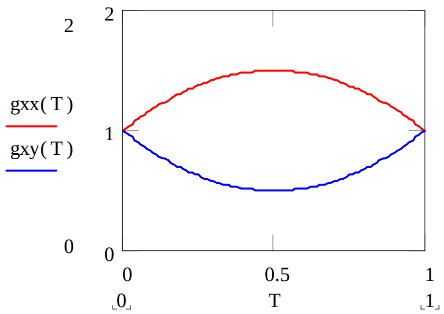
Преобразование четвертых моментов (для определенных видов полей):

$G'_{xx}=T^2G_{xx}+R^2G_{yy}+4TRG_{xy}$,
$G'_{xy}=TR(G_{xx}+G_{yy})+(T-R)^2G_{xy}$.

1) Пусть $G_{xx}=G_{yy}$, $n_x=n_y=n$; и пусть на входе - 2 независимых лазера, $g_{xx}=g_{yy}=g_{xy}=1$,

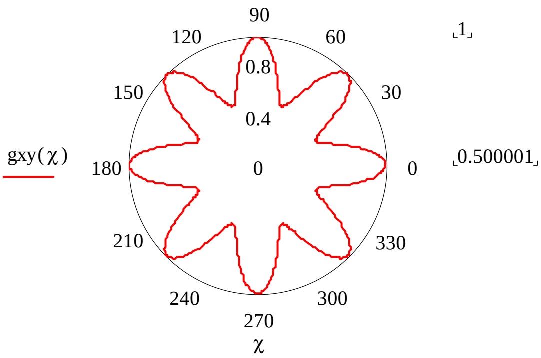
$g'_{xx}= T^2+R^2+4TR=1+2TR=1+2T-2T^2$,
$g'_{xy}=2TR+(T-R)^2=1-2TR=1-2T+2T^2$.

Картинка:



Для пластинки: $t=\cos\delta+i\sin\delta\cos2\chi$; $r=i\sin\delta\sin2\chi$.

Для $\lambda/2$: $t=i\cos2\chi$, $r=i\sin2\chi$ и $T=\cos^2(2\chi)$, $R=\sin^2(2\chi)$



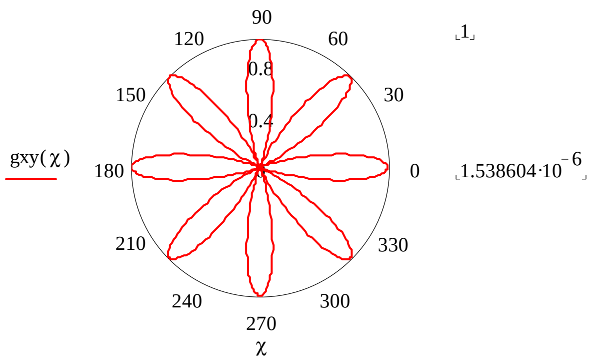
Вид $g'_{xy}(\chi)$ в полярных координатах. Видность 33%. Лепестков 8, т.к. аргумент - угол поворота пластинки. Если бы вращали призму Глана, лепестков было бы 4 (см. лекцию 1)

2) Пусть теперь на входе - бифотонное излучение типа II; $G_{xx}=G_{yy}=0$, $G_{xy}=|c|^2$.

$n_x=n_y=|c|^2$;

$G'_{xx}=4TRG_{xy}$, $G'_{xy}=(T-R)^2G_{xy}$,

$g'_{xx}=4T(1-T)=4\cos^2(2\chi)\sin^2(2\chi)=\sin^2(4\chi)$; $g'_{xy}=(2T-1)^2=(2\cos^2(2\chi)-1)^2=\cos^2(4\chi)$



g'_{xy} в полярных координатах

Инварианты четвертого порядка

Для вторых моментов у нас были инварианты:

1) $N_x+N_y=S_0$

   $n_x+n_y=s_0$ - интенсивность, полное число фотонов (малые буквы обозначают средние)
2) $P=\langle|\mathbf{S}|\rangle/s_0$ - степень поляризации
3) Значит, и S_0 в любой степени будет инвариантом.

$S_0^2=(N_x+N_y)^2=N_x^2+N_y^2+2N_xN_y$

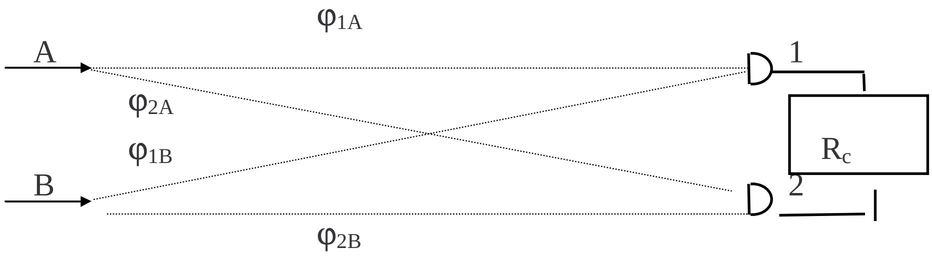
$\langle S_0^2\rangle=\langle :N_x^2:+N_x\rangle+\langle :N_y^2:+N_y\rangle+2\langle N_xN_y\rangle=G_{xx}+G_{yy}+2G_{xy}+s_0$

Флуктуации:

$\Delta S_0^2=\langle S_0^2\rangle-\langle S_0\rangle^2=\langle N_x^2\rangle+\langle N_y^2\rangle+2\langle N_xN_y\rangle-n_x^2-n_y^2-2n_xn_y=\Delta n_x^2+\Delta n_y^2+2\langle\Delta N_x\Delta N_y\rangle$.

Интерференция Брауна-Твисса и двухфотонная интерференция

Пусть свет с произвольной статистикой направляется на такой интерферометр (Юнга).



Ранее в курсе квантовой оптики уже рассматривалась интерференция интенсивности в таком интерферометре. (Что такое интерференция? Проявление «фазовой памяти» в интенсивности или ее моментах.) Там
была интерференция с фазой $\Phi=\varphi_{1A}-\varphi_{1B}-\varphi_{2A}+\varphi_{2B}$. То есть с разностной фазой; если перед одним из источников или одним из детекторов поставить фазовращатель, Ф не изменится. Сейчас мы покажем, что возможна интерференция и с суммарной фазой.

$$a_1=a_Ae^{i\varphi1A}+a_Be^{i\varphi1B},$$
$$a_2=a_Ae^{i\varphi2A}+a_Be^{i\varphi2B},$$

$$N_1=a_A^+a_A+ a_B^+a_B+a_A^+a_Be^{i(\varphi1B-\varphi1A)}+ \text{c.c.},$$
$$N_2=a_A^+a_A+ a_B^+a_B+a_A^+a_Be^{i(\varphi2B-\varphi2A)}+ \text{c.c.},$$

Чтобы найти скорость счета совпадений, надо вычислить нормально упорядоченный коррелятор

$$\langle:N_1N_2:\rangle=\langle:N_A^2:\rangle+\langle:N_B^2:\rangle+2\langle:N_AN_B:\rangle+\langle a_A^{+2}a_B^2\rangle\exp\{i(\varphi_{B1}+\varphi_{B2}-\varphi_{A1}-\varphi_{A2})\}+\text{c.c.}+$$
$$+\langle a_A^+a_B^+a_B\, a_A\rangle\exp\{i(\varphi_{B1}-\varphi_{B2}-\varphi_{A1}+\varphi_{A2})\}+\text{c.c.}$$

С разностной фазой - интерференция Брауна-Твисса, с суммарной - двухфотонная.

Когда есть соответствующий коррелятор?

Например, на входе - два независимых источника бифотонов,

$\psi=(|0\rangle+c|2\rangle)_A(|0\rangle+c|2\rangle)_B\cong|0,0\rangle+|2,0\rangle+|0,2\rangle$ (моды различаем по источникам A,B).

Тогда коррелятор с суммарной фазой будет равен

$\langle\psi|a_A^{+2}a_B^2|\psi\rangle\exp\{i(\varphi_{B1}+\varphi_{B2}-\varphi_{A1}-\varphi_{A2})\}+c.c.=$
$=\langle 0,0|+\langle 2,0|+\langle 0,2|\ |a_A^{+2}a_B^2\{|0,0\rangle+|2,0\rangle+|0,2\rangle\}\exp\{i(\varphi_{B1}+\varphi_{B2}-\varphi_{A1}-\varphi_{A2})\}+c.c.$
Справа «выживет» последнее слагаемое ВФ, оператор $a_A^{+2}a_B^2$ переведет его в $|2,0\rangle$.
Получим просто $\exp\{i(\varphi_{B1}+\varphi_{B2}-\varphi_{A1}-\varphi_{A2})\}+c.c.=2\cos(\varphi_{B1}+\varphi_{B2}-\varphi_{A1}-\varphi_{A2})$. Видность такой интерференции будет 100%.

На эффекте двухфотонной интерференции основаны также поляризационные преобразования бифотонов. Например, пусть два нелинейных кристалла с синхронизмом типа I излучают состояния вида $\psi=|0\rangle+c|2,0\rangle$ (первый кристалл) и $\psi=|0\rangle+c|0,2\rangle$ (второй кристалл), т.е. один кристалл излучает пары, поляризованные линейно по X, а второй – пары, поляризованные линейно по Y. Тогда при конструктивной интерференции (фаза 0) эти состояния дают бифотоны вида $|R,L\rangle$, а при деструктивной – бифотоны вида $|45,-45\rangle$. На сфере Пуанкаре это выглядит так: