Лекция 10
Оператор сжатия. Экспериментальная схема для
получения квадратурного сжатия.

1. ***Оператор сжатия***

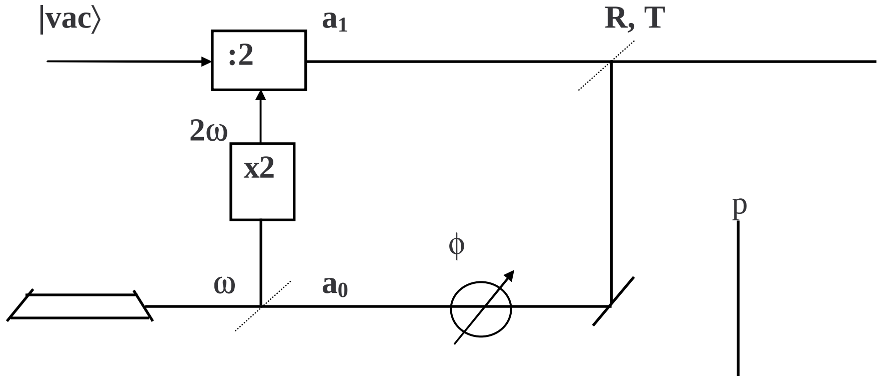
В представлении взаимодействия волновая функция удовлетворяет уравнению
$d|\psi\rangle/dt=(\Gamma/2)(a^{+2}-a^2)|\psi\rangle$, решение:
$|\psi(t)\rangle=\exp\{\Gamma t/2(a^{+2}-a^2)\}|\psi(0)\rangle=S|\psi(0)\rangle$.
Оператор сжатия $S=\exp\{\tau/2(a^{+2}-a^2)\}$, $\tau\equiv\Gamma t$.
Тогда операторы преобразуются как
$a(t)=S^+a(0)S=\exp\{\tau/2(a^2-a^{+2})\}a\exp\{\tau/2(a^{+2}-a^2)\}\}$
Используем перестановочное соотношение:

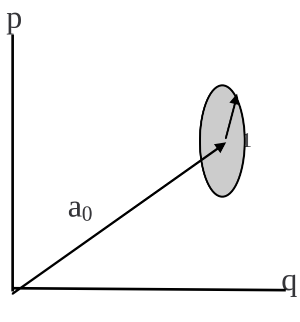
$$e^B Ae^{-B}=A+[B,A]+(1/2!)[B,[B,A]]+(1/3!)[B,[B,[B,A]]]+....$$

$[B,A]=\tau/2[(a^2-a^{+2}),a]=\tau a^+$
$[B,[B,A]]=\tau^2 a$
$[B,[B,[B,A]]]=\tau^3 a^+$
....
$$a(t)=S^+a(0)S=\exp\{\tau/2(a^2-a^{+2})\}a\exp\{\tau/2(a^{+2}-a^2)\}\}=a+\tau a^+ + \tau^2 a/2!+\tau^3 a^+/3!+...=$$
$$=a(1+\tau^2/2!+\tau^4/4!+...)+a^+(\tau+\tau^3/3!+\tau^5/5!+...)=a\,\mathrm{ch}\tau+a^+\,\mathrm{sh}\tau$$

2. ***Получение сжатия с помощью вырожденного параметрического преобразователя (эксперимент)***

Вырожденный параметрический усилитель с вакуумом на входе и с гомодином.
Излучение гомодина должно быть очень интенсивным, а светоделитель должен почти все пропускать (иначе портится сжатие).
Гомодин нужен для того, чтобы выделить квадратуры. Он дает сильное поле на несущей частоте, а слабый сигнал параметрического рассеяния его модулирует.
Квадратурное сжатие поля a_1 переходит в амплитудное сжатие суммарного поля на детекторе, ta_1+ra_0.





На детекторе: $a=ra_0+ta_1$, пусть r,t - действит.
средняя интенсивность

$$\langle a^+a\rangle=\langle(ra_0^{\ +}+ta_1^{\ +})(ra_0+ta_1)\rangle.$$

Ток детектора ей пропорционален (пусть равен);

$i=\langle(ra_0^+ +ta_1^+)(ra_0+ta_1)\rangle=R\langle a_0^+ a_0\rangle+T\langle a_1^+ a_1\rangle+rt(\langle a_1^+ a_0\rangle+c.c.)=Rn_0+Tn_1+$
$+rt(\langle a_1^+\rangle\langle a_0\rangle+c.c.)=Rn_0+Tn_1$, т.к. $\langle a_1^+\rangle=0$
(нет однофотонных состояний, только пары)
Флуктуации тока
$\langle\Delta i^2\rangle=\langle i^2\rangle-\langle i\rangle^2=\langle(ra_0^+ +ta_1^+)(ra_0+ta_1) (ra_0^+ +ta_1^+)(ra_0+ta_1)\rangle-(Rn_0+Tn_1)^2=$
$=\langle(Ra_0^+a_0+rta_1^+a_0+rta_1a_0^+ +Ta_1^+a_1)(Ra_0^+a_0+rta_1^+a_0+rta_1a_0^+ +Ta_1^+a_1)\rangle-(Rn_0+Tn_1)^2=$
$=\langle(R^2a_0^+a_0 a_0^+a_0+RTa_1^{+2}a_0^2+RTa_1^+a_1a_0a_0^+ + 2 RTa_1^+a_1 a_0^+a_0+RTa_1^2a_0^{+2}+$
$+RTa_1a_1^+a_0^+a_0+T^2a_1^+a_1 a_1^+a_1)\rangle-(Rn_0+Tn_1)^2=$
$=\underline{R^2 n_0^2}+R^2 n_0+RT\langle a_1^{+2}a_0^2+ a_1^2a_0^{+2}\rangle+RT n_1+RT n_0+\underline{4RTn_on_1}+T^2\langle a_1^{+2}a_1^2\rangle+$
$+T^2 n_1\underline{-R^2 n_0^2-2RTn_0n_1}-T^2 n_1^2=$
$=Rn_0+RT\langle a_1^{+2}a_0^2+ a_1^2a_0^{+2}\rangle+Tn_1 +2RTn_on_1+T^2(g-1)n_1^2,\ g\equiv\langle a_1^{+2}a_1^2\rangle/n_1^2$

Но $\langle a(t)^2\rangle=\langle a(t)^{+2}\rangle= ch(\Gamma t) sh(\Gamma t)$
$\langle\Delta i^2\rangle=Rn_0+2RTn_on_1+2RTn_0\cos\varphi\, ch(\Gamma t) sh(\Gamma t)+Tn_1 +T^2(g-1)n_1^2;$
оставим только слагаемые с n_0 (сильное когерентное поле);
$\langle\Delta i^2\rangle\approx Rn_0+2RTn_on_1+2RTn_0\cos\varphi\, ch(\Gamma t) sh(\Gamma t)= Rn_0(1+2Tn_1+2T\cos\varphi\, ch(\Gamma t) sh(\Gamma t))$
Подавление флуктуаций при $\cos\varphi=-1$,
$\langle\Delta i^2\rangle\approx Rn_0(1+2Tn_1-2T\, ch(\Gamma t) sh(\Gamma t))$, но $n_1=sh^2(\Gamma t)$;
$\langle\Delta i^2\rangle\approx Rn_0(1+ 2Tsh^2(\Gamma t)- 2Tch(\Gamma t) sh(\Gamma t))= Rn_0(1+ 2Tsh(\Gamma t)(sh(\Gamma t)- ch(\Gamma t)))=$
$= Rn_0(1-2Tsh(\Gamma t)\exp(-\Gamma t))= Rn_0(1-T+T\exp(-2\Gamma t))= Rn_0(R+T\exp(-2\Gamma t))$

Видно, что при малом R флуктуации подавляются.

3.***Поляризационное сжатие***

Рассмотрим теперь двухмодовое параметрическое преобразование.
Гамильтониан
$V=(iz\Gamma)(a^+b^+-ab),\ \Gamma\sim\chi E_0$

$da/dt=\Gamma b^+$
$db/dt=\Gamma a^+$

Решения:
$a'=ua+vb^+$
$b'=ub+va^+$,

$u=ch(\Gamma t),\ v=sh(\Gamma t),\ |u|^2-|v|^2=1$.

Унитарность: $[a',a'^+]=1,\ [b',b'^+]=1,\ [a',b']=0$
Если моды - поляризационные, то это т.н. рассеяние типа II. При условии, что на входе параметрического усилителя - вакуум, найдем моменты на выходе.

Вторые моменты.

$\langle a'^+a'\rangle=\langle 0,0|(u^*a^+ +v^*b)(ua+vb^+)|0,0\rangle=v\langle 0,0|(u^*a^+ +v^*b)|0,1\rangle=|v|^2=\langle b'^+b'\rangle\equiv n;$
$\langle a'b'\rangle=\langle 0,0|(ua+vb^+)(ub+va^+)|0,0\rangle=v\langle 0,0|(ua+vb^+)|1,0\rangle=uv=\sqrt{n(n+1)}$

Четвертые моменты

$\langle a'^{+2}a'^{2}\rangle=|\phi|^2$, $\phi=a'^{2}|0,0\rangle=(ua+vb^{+})^2|0,0\rangle=v(ua+vb^{+})|0,1\rangle=v^2\sqrt{2}|0,2\rangle$,
$\langle a'^{+2}a'^{2}\rangle=2v^4=2n^2$
$\langle a'^{+}b'^{+}b'a'\rangle=|b'a'|0,0\rangle|^2=|(ub+va^{+})(ua+vb^{+})|0,0\rangle|^2=|(ub+va^{+})v)|0,1\rangle|^2=$
$=|(uv|0,0\rangle+v^2|1,1\rangle)|^2=v^2(u^2+v^2)=n(2n+1)$
$\langle a'^{+2}b'^{2}\rangle=........=0$

Найдем параметры Стокса и их флуктуации.
$\langle S_1\rangle=\langle a'^{+}a'-b'^{+}b'\rangle=0$
$\langle S_2\rangle=\langle a'^{+}b'+c.c.\rangle=0$
$\langle S_3\rangle=-i\langle a'^{+}b-c.c.\rangle=0$

$\langle S_1^2\rangle=\langle a'^{+}a'a'^{+}a'\rangle+\langle b'^{+}b'b'^{+}b'\rangle+2\langle a'^{+}a'b'^{+}b'\rangle=2n^2+n+2n^2+n-2\langle a'^{+}b'^{+}b'a'\rangle=$
$=4n^2+2n-2n(2n+1)=0$
$\langle S_2^2\rangle=\langle(a'^{+}b'+a'b'^{+})^2\rangle=\langle a'^{+2}b'^{2}\rangle+\langle a'^{+}a'b'b'^{+}\rangle+\langle a'a'^{+}b'^{+}b'\rangle+\langle a'^{2}b'^{+2}\rangle=$
$=n+2n^2+n+n+2n^2+n=4n(n+1)$
$\langle S_3^2\rangle=\langle S_2^2\rangle$

Получается "диск":