

Лекция 8. Основные понятия теории измерения.

1. Классические вероятностные модели. Приготовление и измерение классического состояния. Аналог смешанного состояния. Маргинальные моменты. Связь моментов и вероятностей. Проблема моментов.
2. Квантовые вероятностные модели. Прямые и косвенные измерения. Опыты Штерна и Герлаха. Двухуровневые системы (примеры). Формула Раби для вероятности перехода.
3. Измерительный (Борна) и проекционный постулаты (фон Неймана).
4. Понятие квантовой томографии.

Обычно рассматриваемые в учебниках и методических работах по квантовой физике схемы оказываются слишком далекими от лабораторной реальности. Это относится и к работам по так называемой *квантовой теории измерения*. Эта теория уделяет мало внимания реальным приборам, регистрирующим элементарные квантовые события -- детекторам элементарных частиц и фотодетекторам (счетчики Гейгера, камера Вильсона, ФЭУ, и т.д.). В значительной мере игнорируются и реальные процедуры *приготовления*, вместо этого приготовление традиционно отождествляется с *измерением*.

В этой лекции проведен элементарный логический анализ ряда терминов квантовой физики исходя из реальных измерительных процедур. В частности, сделана попытка операционального обоснования тезиса о том, что волновая функция ψ **данного индивидуального** объекта -- атома, электрона, α -частицы -- имеет четкий операциональный смысл. При этом предлагается тщательно разделять процедуры *приготовления*, *измерения*, *фильтрации*.

Можно выделить три типа квантовых экспериментов.

1) Измерение спектров -- энергетической структуры молекул, атомов, ядер..(здесь теория часто дает содержательную информацию исходя лишь из симметрии объекта)

2) Измерение вероятностей переходов, сил осцилляторов, относительных весов различных каналов распада

3) Динамические эксперименты, измерение распределения вероятностей каких либо наблюдаемых, реконструкция состояния или томография.

Ниже нас будут интересовать в основном именно динамические эксперименты, которые являются в некотором смысле наиболее фундаментальными.

Классические вероятностные модели

1. Приготовление классического состояния.

При бросании обычной игральной кости возможно шесть *элементарных* событий: выпадение цифр $n = 1, 2, 3, 4, 5$ или 6 на верхней грани. Назовем совокупность этих шести возможностей *пространством элементарных событий* кости. Это пространство состоит из дискретных пронумерованных точек, $n = 1, \dots, N, N = 6$. Каждому событию припишем из физических соображений определенную вероятность p_n , при этом выполняются колмогоровские аксиомы $p_n \geq 0, \sum_n p_n = 1$. Эту совокупность назовем *вектором состояния*

или, короче, *состоянием* и будем ее записывать так:

$\Psi \equiv (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) \equiv \{p_n\}$. Если кость сделана из однородного материала, то естественно принять $p_n = 1/6$, т.е. $\Psi \equiv c(1, 1, 1, 1, 1, 1), c = 1/6$. Но в

общем случае это не так. Можно изготовить или, как говорят в квантовой физике, *приготовить* фальшивую кость, у которой 6-ая грань сделана из очень тяжелого материала, капелька которого попала и на пятую грань, так что

$$\Psi \equiv (0,01; 0,01; 0,01; 0,01; 0,02; 0,94). \quad (8.1)$$

Таким образом, **каждой** кости можно приписать определенное состояние Ψ , который содержит полную вероятностную информацию о данной кости.

Каждое возможное состояние можно *отобразить* в виде точки в воображаемом 6-мерном *пространстве состояний*, если вдоль базисных осей этого пространства откладывать p_n или $c_n = \sqrt{p_n}$. В последнем случае в силу условия нормировки точка принадлежит сфере и вектор состояния можно записывать так:

$$\Psi = \{c_n\}$$

Пусть теперь $N = 2$. Можно представить себе набор из фальшивых монет, приготовленных из намагниченного железа. При этом монеты бросаются на намагниченный стол, так что вероятности выпадения орла p_1 или решки p_2 для данной монеты зависит от силы и направления ее намагниченности.

2. Измерение классического состояния.

Измерить (определить) состояние данной монеты с помощью одного *испытания* невозможно. Выпадение, например, орла может соответствовать любому состоянию, кроме $\Psi = (1, 0)$. Надо или бросать одну и ту же монету много раз, $M \gg 1$, или изготовить большое множество одинаково приготовленных монет - *ансамбль* монет. Если считать, что монеты при бросании не меняют свойств, не изнашиваются, то эти способы эквивалентны (свойство *эргодичности* вероятностной модели).

Бросив монету 10 раз и получив каждый раз орла, можно с некоторой надежностью утверждать, что $\Psi_{10} = (0, 1)$. Однако, не исключено, что при следующих 90 испытаниях монета выпадет решкой вверх. Теперь мы будем более или менее уверены, что $\Psi_{100} = (0,9; 0,1)$, -- и опять можем ошибиться, потому что, скажем, после следующих 10^3 испытаний может, в принципе, оказаться $\Psi_{1000} = (0,1; 0,9)$. Таким образом, измерить истинное (приготовленное) состояние Ψ со 100% надежностью (как, впрочем, и приготовить) вообще невозможно, можно лишь надеяться, что при увеличении числа бросков M вероятность сильно ошибиться уменьшается (это обстоятельство количественно выражают через *доверительный интервал*) и Ψ_M все же приближается к истинному значению Ψ . Итак, мы видим, что принципиального различия между одним испытанием и множеством испытаний нет, результаты эксперимента всегда имеют лишь вероятностный характер.

Таким образом в вероятностных моделях классической физики при операциональном подходе возникает принципиальное различие в возможности приписывания понятия состояния индивидуальному объекту: при *приготовлении* объекта это четко определенная операция, в то время как при *измерении* она не имеет смысла, состояние можно приписать с некоторой ограниченной степенью надежности лишь большому набору одинаково приготовленных объектов.

Аналогичный вывод можно сделать и в квантовой физике. Конечно, приведенная аналогия ограничена, под приготовлением кубика можно понимать и его свойства и параметры начального толчка, которые согласно законам классической механики определяют будущий исход. Начальное состояние ψ_0 в квантовой теории определяет и начальные условия и вероятности различных исходов.

3. Аналог смешанного состояния в классике. Маргинальные моменты.

3.1. Рассмотрим два набора монет. Пусть каждый набор характеризуется вероятностями выпадения орла и решки:

$$\Psi_1 = \{p_1(\text{орел}), p_1(\text{решка})\}, \quad (8.2)$$

$$\Psi_2 = \{p_2(\text{орел}), p_2(\text{решка})\}.$$

Пусть общее число монет равно N , а в каждом наборе, соответственно, N_1 и N_2 . При подбрасывании наугад взятой монеты из полного набора, вероятности выпадения орла и решки окажутся взвешенными:

$$p(\text{орел}) = \frac{p_1(\text{орел})N_1 + p_2(\text{орел})N_2}{N}, \quad (8.3)$$

$$p(\text{решка}) = \frac{p_1(\text{решка})N_1 + p_2(\text{решка})N_2}{N}.$$

Эти вероятности определяются не только индивидуальными свойствами монет (вероятностями выпадения орла и решки в данном наборе), но и свойствами ансамбля - числами N_1 и N_2 . Существует, как бы, двойная стохастичность - случайность выпадения орла или решки данной монеты и случайность выбора монеты из двух наборов. Этот пример можно рассматривать как *аналог квантового смешанного состояния*, когда к чисто квантовой неопределенности чистого состояния добавляется классическое усреднение по наборам таких состояний. Смешанное состояние не характеризует индивидуальные свойства каждой из подсистем - оно относится ко всему ансамблю в целом.

3.2. *Маргинальные (частные) вероятности* - определяются через элементарные вероятности, характеризующие состояние через суммирование. Они также характеризуют свойства индивидуального состояния объекта. Для примера, приведенного выше (8.1), например, маргинальные вероятности выпадения четных и нечетных чисел кубика составят, соответственно:

$$p_{\text{четн.}} = 0.96,$$

$$p_{\text{нечетн.}} = 0.04.$$

4. Связь моментов и вероятностей.

Эти связи окажутся полезными при анализе неравенств Белла.

Рассмотрим две разные монеты, которые подбрасываются одновременно. Введем две случайные величины S_1 и S_2 , каждая из которых характеризуется двумя значениями (дихотомная переменная) $s_1, s_2 = \pm 1$. Это удобная параметризация выпадения орла и решки. Полная система, состоящая из двух монет, описывается набором вероятностей $p(s_1, s_2)$. Это - вероятности выпадения четырех парных комбинаций: $(+1 +1, +1 -1, -1 +1, -1 -1)$. Например, если монеты не взаимодействуют при подбрасывании, то двумерные вероятности определяются $p(s_1, s_2)$ произведением одномерных вероятностей:

$$p(s_1, s_2) = p_1(s_1)p_2(s_2). \quad (8.4)$$

Предположим, что монеты при подбрасывании взаимодействуют, так что условие (8.4) больше не выполняется. Тогда в исходах испытаний будет наблюдаться некая корреляция выпадения орлов и решек двух монет, которая определяется характером взаимодействия. Полное состояние, описывающее всевозможные исходы дается набором четырех вероятностей $p(s_1, s_2)$. Рассмотрим маргинальные вероятности. Вероятность того, что определенная монета выпадет определенной стороной складывается из двух вероятностей:

$$p_n(s_n) = p(s_n, +1) + p(s_n, -1). \quad (8.5)$$

В среднем n -ая ($n = 1, 2$) монета будет выпадать “орловой” стороной:

$$\langle S_n \rangle = p_n(+1) - p_n(-1) = p_n(+1) - \{1 - p_n(+1)\} = 2p_n(+1) - 1. \quad (8.6)$$

В среднем обе монеты упадут орлом или решкой, а не разными сторонами:

$$\langle S_1 S_2 \rangle = p(+1, +1) + p(-1, -1) - p(+1, -1) - p(-1, +1). \quad (8.7)$$

Видно, что

$$|\langle S_n \rangle| \leq 1, \quad |\langle S_1 S_2 \rangle| \leq 1. \quad (8.8)$$

В этом случае можно решить обратную задачу, т.е. выразить вероятности через моменты (т.н. *проблема моментов*):

$$p_n(s_n) = \frac{1 + s_n \langle S_n \rangle}{2}, \quad (8.9)$$

$$p(s_1, s_2) = \frac{1}{4} [1 + s_1 \langle S_1 \rangle + s_2 \langle S_2 \rangle + s_1 s_2 \langle S_1 S_2 \rangle]. \quad (8.10)$$

Из (8.10), а также из того, что $p(s_1, s_2) \geq 0$, следует, что моменты не являются независимыми величинами. Они должны удовлетворять некоторым соотношениям (неравенствам). Например, если заданы первые моменты $\langle S_n \rangle$, то второй момент или коррелятор $\langle S_1 S_2 \rangle$ будет ограничен:

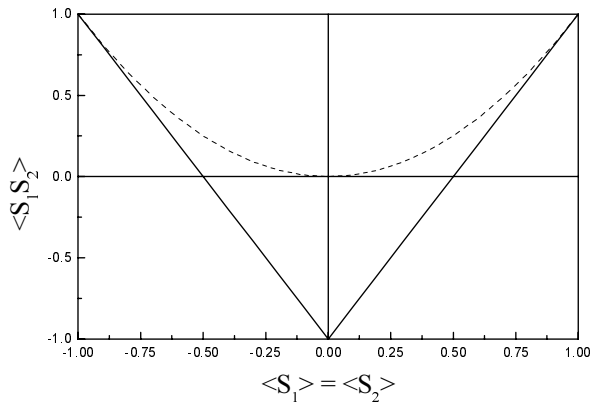
$$S_{\min} \leq \langle S_1 S_2 \rangle \leq S_{\max}. \quad (8.11)$$

Здесь

$$S_{\min} = \max \{-1 - \langle S_1 \rangle - \langle S_2 \rangle, -1 + \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle\} \quad (8.12)$$

$$S_{\max} = \min \{1 + \langle S_1 \rangle - \langle S_2 \rangle, 1 - \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle\}.$$

Например, в важном частном случае, когда $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$ получается ограничение на коррелятор: $2|\langle S_1 \rangle| - 1 \leq \langle S_1 S_2 \rangle \leq 1$. Так, коррелятор не может равняться нулю при $\langle S_1 \rangle > 1/2$, т.е. при (см.8.6) $p \geq 1/2(\langle S_1 \rangle + 1) = 1/2(3/2) = 3/4$.



На рисунке показана зависимость между коррелятором $\langle S_1 S_2 \rangle$ и первыми моментами, когда $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$. Центральная треугольная часть с вершиной в нуле - область разрешенных значений коррелятора. Два прямоугольных треугольника по бокам - запрещенная область, где вероятности, выраженные через моменты принимают отрицательные значения. Пунктирная парабола - связь между коррелятором и моментами для независимых исходов подбрасывания монет: $\langle S_1 S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle \langle S_2 \rangle$

Квантовые вероятностные модели

Считается, что квантовая случайность, лежащая в основе вероятностной интерпретации волновой функции (по Борну) имеет фундаментальный характер (“бог играет в кости”). До сегодняшнего дня все попытки свести эту случайность к детерминированности (например, теория скрытых параметров) не привели к успеху.

В квантовой теории также можно пытаться исходя из набора квантовых моментов построить соответствующие им распределения вероятностей. Однако в случае некоммутирующих операторов эта процедура может оказаться неоднозначной. Более того, она приводит к функциям, принимающим неопределенные или отрицательные значения, как, например, функции Вигнера $W(x, p)$ и распределение Глаубера-Сударшана $P(\alpha)$. Неопределенность последней функции часто рассматривают как критерий неклассичности поля.

Одной из важных особенностей квантовых вероятностных моделей является тот факт, что в некоторых случаях нельзя говорить об элементарных вероятностях при существовании маргинальных. Часто этот факт относят к неколмогоровости квантовой механики. Ей соответствует отказ от концепции *априорных* (т.е. до измерений) значений у наблюдаемых. Например, из соотношения неопределенностей следует, что можно измерить или вычислить через волновую функцию распределения координат и для импульса частицы в данный момент времени. Однако нельзя измерить их совместное распределение. Такое распределение неоднозначно и приводит в некоторых случаях к отрицательным вероятностям. В этом случае приписывание частице априорных значений координат и импульсов теряет смысл.

1. Полуклассические этапы в квантовых моделях.

В квантовой теории измерения можно выделить две актуальные задачи. Прежде всего, это фундаментальная проблема объединения квантовой и классической физики, единого подхода к квантовому объекту и измеряющего его свойства макроскопическому прибору. Эта глобальная задача, требующая, очевидно, выхода за рамки стандартного квантового формализма, до сих пор не решена. Другая задача -- создание в рамках квантовой теории реалистических моделей существующих измерительных процедур. Эта задача теории измерения, как правило, игнорируется.

Рассмотрим логическую структуру современных квантовых динамических моделей, допускающих сопоставление с экспериментом. Формально квантовая теория может описывать действительность лишь с помощью общей волновой функции Ψ некоторой изолированной системы, которая должна включать как операторы изучаемой подсистемы, так и операторы приготовительной и измерительной аппаратуры, взаимодействующей с частицей. При желании можно включить в систему и экспериментаторов. В этом смысле чисто квантовый мир является невидимым, вещью в себе.

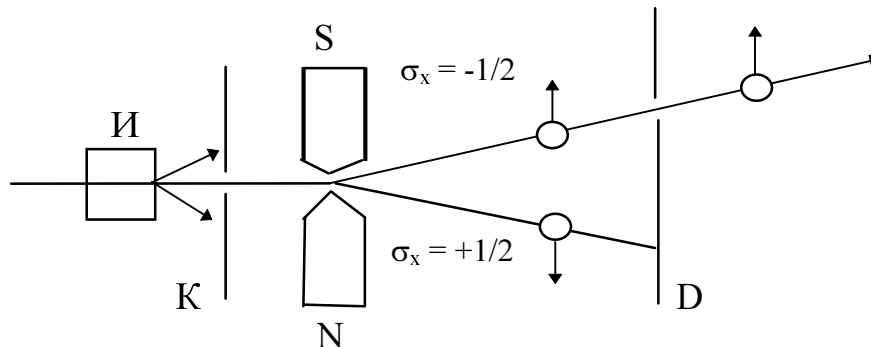
Поэтому необходимо на основании дополнительных, интуитивных соображений как то ограничить число учитываемых степеней свободы и дополнительно постулировать соответствие между математическими символами и макроскопическими приборами -- приготовительным и измерительным. Фактически мы вынуждены на двух этапах использовать полуклассический подход: на "входе" -- при определении начального состояния квантовой системы ψ_0 , задаваемого классическими силами, -- и на "выходе" -- при выборе "крайнего" оператора B_m , влияющего на классический измерительный прибор. Задавая ψ_0 мы исключаем операторы приготовительного прибора, а выбирая B_m мы исключаем операторы измерительного прибора. Примеры этих двух полуклассических этапов расчета будут даны ниже. Между входом и выходом система предоставлена самой себе и эволюционирует согласно уравнению Шредингера.

Рассмотрим подробнее последний, выходной этап -- процедуру измерения. Различают *прямые* и *косвенные* квантовые измерения. При прямом измерении имеется один квантовый объект A , который описывается с помощью ВФ $\psi(a, b, c, \dots)$. Для простоты выписываем только один аргумент ВФ и считаем состояние чистым; в случае смешанного состояния добавляется тривиальное классическое усреднение, учитывающее несовершенство приготовительной процедуры, см. ниже. Связь с внешним миром устанавливается выбором (на основании физических, интуитивных соображений) какого-либо оператора A в качестве "наблюдаемого". Параметры измерительной аппаратуры при этом исключаются из рассмотрения. С экспериментом можно сравнивать распределение $p(a) = |\psi(a)|^2$ или его моменты $\langle a^k \rangle$. Как уже отмечалось, разумное подтверждение расчета возможно лишь при многократном повторении приготовительной и измерительной процедур.

При косвенном измерении кроме исследуемого объекта имеется по крайней мере еще одно "пробное тело" **В** (**квантовая считывающая система**), взаимодействующее (или взаимодействовавшее) с A и служащее посредником между A и макромиром. Рассматривается общая ВФ $\Psi(a, b)$ системы $A + B$, при этом взаимодействие A и B рассчитывается по формальным

правилам квантовой теории. В качестве *наблюдаемого* оператора B теперь уже выбирается оператор, относящийся к \mathbf{B} . Теория дает общее совместное распределение $p(a, b) = |\Psi(a, b)|^2$. Классическое суммирование по вероятностям ненаблюдаемых событий приводит к наблюдаемому *маргинальному* распределению $p(b) = \sum_a p(a, b)$, которое несет информацию о $p(a)$.

Операторы A и B могут относиться к разным степеням свободы одного объекта: например, в эксперименте Штерна-Герлаха $A \equiv S_x$ и $B \equiv X$ -- операторы проекции спина и поперечные координаты одной частицы, которые становятся коррелированными при движении в неоднородном магнитном поле.



И - источник частиц со спином $\sigma_x = \pm 1/2$, К - коллиматор, формирующий пучок, S-N - постоянный магнит, создающий неоднородное магнитное поле, D - экран, на месте которого можно установить фотопластинку или дырочку, пропускающую отселектированный по спинам пучок в данном направлении.

В результате по непосредственно наблюдаемой (на фотопленке, например) поперечной *классической* координате частицы x_1 косвенно, на основании теоретической модели, описывающей влияние магнитного поля на ВФ частицы со спином, определяется значение проекции спина $\sigma_x = \sigma_x(x_1)$ на поперечное направление y данной частицы. Полученное число принимается за априорную (до измерения) координату частицы. Точность измерения ограничена размером атома серебра, поглотившего частицу. Значит, непосредственно наблюдаемым оператором является оператор координаты X . Отсюда при известных других параметрах можно рассчитать (исходя из уравнения Шредингера и начальной волновой функции частицы) априорную проекцию спина частицы. Если вместо фотопленки установить экран с отверстием в точке x_1 , то получим аппарат, приготавливающий частицы в состоянии $|\sigma_x\rangle$ с определенной проекцией спина. Магнит и экран служат *фильтром* или *спектральным анализатором*, который можно считать частью или приготовительной или измерительной аппаратуры. Но целесообразно отличать процедуру фильтрации от приготовления и измерения. Заметим, что фильтрация в общем случае описывается неунитарным преобразованием, при котором система переходит в смешанное состояние.

Обычно термины *наблюдаемая* и *оператор* отождествляются; однако, в любой квантовой модели для сравнения с экспериментом какой то оператор необходимо выделить в качестве "более наблюдаемого". Связь с внешним миром устанавливается выбором (на основании физических, интуитивных соображений) какого-либо оператора B_m в качестве "наблюдаемого". Параметры макроскопической измерительной аппаратуры при этом исключаются из рассмотрения.

Характерно, что при общем формальном рассмотрении выбор "крайнего" оператора не критичен, он не сказывается на правильности предсказаний теории. Иначе говоря, границу между двумя мирами можно расположить произвольно, иногда ее располагают в сетчатке глаза наблюдателя или в его мозге. Как известно, космонавты воспринимают космические частицы непосредственно глазом; при этом "крайние" операторы надо, очевидно, располагать в нервных клетках *наблюдателя* и этот традиционный субъективный термин получает некоторое оправдание. Формально можно рассматривать ВФ всей измерительной аппаратуры или всей вселенной. Но подобные модели не допускают количественного сравнение с реальными экспериментами. Для этой цели необходимо сократить число степеней свободы модели и выбрать некоторый оператор в качестве *наблюдаемого*.

В качестве такого "более наблюдаемого" оператора часто выбирается оператор энергии атома, который принадлежит детектору типа счетчика Гейгера или фотоумножителя. Представляется, что такой выбор соответствует многим реальным детекторам микрособытий, которые служат посредниками между нашим макромиром и "невидимым" миром индивидуальных квантовых объектов.

Измерительный и проекционный постулаты

Около 70 лет назад Дирак и фон Нейман ввели понятие редукции или коллапса волновой функции (ВФ). Они постулировали, что если в эксперименте измерение какого либо оператора A дало некоторое значение a_1 , то ВФ системы независимо от исходного состояния становится равной $|a_1\rangle$ -- собственной функции A , соответствующей измеренному собственному значению. Этот постулат (его называют *проекционным*) иногда оправдывают *принципом повторяемости* -- при повторном измерении A через достаточно короткое время должно обнаружиться то же самое значение a_1 -- иначе понятие измерения относится лишь к прошлому. Было предложено также множество различных динамических моделей процесса измерения, учитывающих влияние большого числа степеней свободы макроскопического измерительного прибора, однако, пока они не получили экспериментального подтверждения. Похоже, что из всех выводов квантовой теории измерения лишь постулат Борна-Дирака допускает сравнение с экспериментом.

Постулат Борна-Дирака.

Чтобы вычислить вероятность наблюдения какого-либо собственного значения a_1 оператора A в момент времени t_1 , надо найти проекцию вектора состояния $|\psi_1\rangle$ на вектор $\langle a_1|$ и возвести ее модуль в квадрат:

$$p(a_1, t_1) = |\langle a_1 | \psi(t_1) \rangle|^2 = |\langle a_1, t_1 | \psi_0 \rangle|^2 = \langle \psi_0 | P(a_1, t_1) | \psi_0 \rangle \quad (8.13)$$

В двух последних равенствах использовано представление Гейзенберга. Под оператором P понимается оператор редукции или проекционный оператор:

$$P(a, t) \equiv |a, t\rangle \langle a, t|,$$

а собственный вектор оператора $A(t)$:

$$|a, t\rangle \equiv U^\dagger(t) |a\rangle,$$

где $U \equiv \exp\left\{-\frac{iHt}{\hbar}\right\}$ - оператор эволюции, а H - не зависящий от времени

оператор Гамильтона. Напомним, что проекторы обладают свойством $P^2 = P$ и двумя собственными векторами 0 и 1.

Согласно постулату Б-Д среднее значение какой-либо наблюдаемой A в момент времени t имеет следующий вид:

$$\langle A(t) \rangle \equiv \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle \psi_0 U(t)^\dagger | A | U(t) \psi_0 \rangle,$$

где $\psi(t) = U(t)\psi_0$. В представлении Гейзенберга:

$$A(t) \equiv U(t)^\dagger A U(t) \text{ и для средних значений в представлении Гейзенберга:}$$

$$\langle A(t) \rangle \equiv \langle \psi_0 | A(t) | \psi_0 \rangle.$$

Постулат Борна (8.13) дает возможность сравнить предсказания теории и эксперимент, однако ничего не говорит о том, что происходит с самим объектом или с его волновой функцией в результате измерения. Происходит редукция ВФ в точке, где находится детектор (где производилось измерение). Чтобы узнать состояние объекта необходимо провести повторное измерение!

Постулат Дирака-фон Неймана.

В результате регистрации собственного значения a_1 происходит проецирование волновой функции системы $|\psi(t_1)\rangle$ на вектор $|a_1\rangle$. Пусть показание a_1 возникло в момент t_1 , тогда P можно представить в виде:

$$|\psi(t_1)\rangle \rightarrow |\psi'(t_1)\rangle = P(a_1, t_1) |\psi_0\rangle. \quad (8.14)$$

Очевидно, для проверки этого утверждения надо в последующий момент $t_2 > t_1$ произвести измерение еще какого-либо оператора системы B . Пусть это измерение описывается оператором $P(b_2, t_2)$. Второй измеритель "видит" измененную ВФ $|\psi'(t_1)\rangle$, поэтому усреднять $P(b_2, t_2)$ надо с ее помощью. В результате получаем формулу Вигнера для совместного распределения:

$$p(a_1, t_1, b_2, t_2) = \langle \psi' | P(b_2, t_2) | \psi' \rangle = \langle \psi_0 | P(a_1, t_1) P(b_2, t_2) | \psi_0 \rangle. \quad (8.15)$$

Можно обобщить этот результат на случай нескольких наблюдаемых.

В соответствии с проекционным постулатом часто утверждается, что *измерение* является в то же время *приготовлением*. Однако, это отождествление противоречит практике реальных квантовых экспериментов, в которых для приготовления ВФ и для измерения используются совершенно различные процедуры. Формально первое из двух последовательных наблюдений можно считать приготовлением новой ВФ, но лучше последний термин сохранить для обозначения процедур, не связанных с регистрирующими приборами (например, приготовления атома в определенном состоянии с помощью лазера - далее).

С чисто операциональной точки зрения последняя формула допускает сравнение с экспериментом лишь целиком, сама P как промежуточный этап не наблюдаема, поэтому (8.15) можно принять в качестве *измерительного постулата*. Это, по-существу, обобщение постулата Борна-Дирака (который применительно к данному случаю имеет вид

$$p(a_1, t_1) = \langle \psi_0 | P(a_1, t_1) | \psi_0 \rangle$$

на случай двух последовательных измерений.

Хотя использование понятия P при описании некоторых экспериментов удобно, однако, не имеет смысла задаваться вопросом о том, что происходит "на самом деле". Можно полагать для наглядности, что при образовании трека в камере Вильсона происходит цепочка редукций -- каждый затравочный атом, около которого возникла капелька воды, приготавливает новую ВФ для следующего атома. При этом каждой капельке воды в реальном треке частицы следует сопоставить свою пару проекторов P_k в обобщение формулы (2) на множество последовательных измерений. Подчеркнем, однако, что это лишь возможная интерпретация, фактически P не нужна для описания трека.

Хотя P считается основным понятием квантовой физики, он по-видимому никогда не использовался для конкретных практических расчетов, допускающих сравнение с экспериментом. Более того, в ряде работ оспаривается необходимость этого понятия. Однако он действительно необходим для **количественного** описания некоторых экспериментов (имеются в виду практические расчеты, допускающие сравнение с экспериментом -- в отличие от общих моделей квантовой теории измерения или рассуждений о ВФ всей аппаратуры). В таких экспериментах должны выполняются три условия: в каждом испытании последовательно проводится измерение двух или более операторов, эти операторы в представлении Гейзенберга не коммутируют и измерения проводятся с достаточно высоким временным разрешением.

К этому классу относятся так называемые время-пролетные эксперименты, широко используемые для измерения скорости элементарных частиц. Частица с достаточно большой энергией последовательно пролетает через два детектора, например, два счетчика Гейгера. Расстояние между детекторами $z_2 - z_1$, деленная на задержку во времени появления импульса на выходе второго детектора $t_2 - t_1$, дает скорость пакета частицы (потерей энергии в детекторах пренебрегается). Пусть частица каждый раз приготавливается в состоянии с достаточно хорошо определенным импульсом, при этом она описывается протяженным волновым пакетом. В результате моменты регистрации t_1, t_2 , отсчитываемые от характерного подготовительного момента $t_0 \equiv 0$, будут флуктуировать. При многократном повторении процедуры можно измерить распределение $p(t_1, t_2)$ или плотность распределения $w(t_1, t_2) = \partial^2 p / \partial t_1 \partial t_2$.

Итак, для большинства наблюдаемых квантовых эффектов понятие P является лишь удобным для наглядной интерпретации вспомогательным понятием, однако для некоторого узкого класса эффектов оно действительно необходимо -- для вывода правила Вигнера. Альтернативный операциональный подход заключается в принятии этого правила в качестве исходного постулата.

Двухуровневая система.

На первых этапах квантовой физики рассматривались лишь атомы с определенной энергией, E_g и E_e , при этом если ограничиться двумя уровнями (*двухуровневый атом*), то у атома остается только две возможности и его пространство состояний эквивалентно пространству намагниченной монеты или ячеек памяти компьютера. Однако, если учесть так называемые *когерентные состояния* с неопределенной энергией, то пространство состояний двухуровневого атома становится непрерывным и имеет вид $|\psi\rangle = a|g\rangle + b|e\rangle$. Теперь состояние задается двумя комплексными числами, $\Psi = (a, b)$ и пространство событий обозначается $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{R}^4$. Однако, если учесть нормировку $|a|^2 + |b|^2 = 1$ и игнорировать общую фазу $|\psi\rangle$, то состояние задается двумя вещественными параметрами, например, сферическими координатами точки (θ, φ) на *сфере Блоха*. Это же пространство состояний (в терминах теории групп оно называется SU(2)-пространством) описывает также спин 1/2 и поляризацию фотона. В последние годы большой интерес привлекает возможность создания *квантовых компьютеров*, в которых вместо электронных ячеек с дихотомным спектром состояний (0,1) будут использоваться системы -- атомы, фотоны -- с SU(2)-пространством, что произведет революцию в компьютерной технике.

Рассмотрим процедуру приготовления. Современная лабораторная техника позволяет поместить одиночный атом в ловушку и охладить его до сверхнизких температур, при этом он переходит в основное состояние $|g\rangle$. В момент времени $t_0 \equiv 0$ на него действует короткий лазерный импульс с определенной амплитудой и длительностью. Лазерное излучение с большой точностью можно рассматривать классически. Частота лазера совпадает с боровской частотой перехода между $|g\rangle$ и одним из возбужденных $|e\rangle$ состояний атома. Согласно теории атом под действием лазерного импульса переходит в заданное состояние $|\psi\rangle$, где коэффициенты a, b определяются "площадью" лазерного импульса -- произведением амплитуды на длительность. Вероятность перехода под действием внешнего монохроматического поля дается формулой Раби:

$$P = \left[\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{\Omega}t/2) \right]^2, \quad (8.16)$$

$$\text{где } \Omega \equiv |\vec{d}_0 \vec{E}_0| / \hbar \text{ - частота Раби} \quad (8.17)$$

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 + (\omega - \omega_0)^2} \text{ - отстройка.}$$

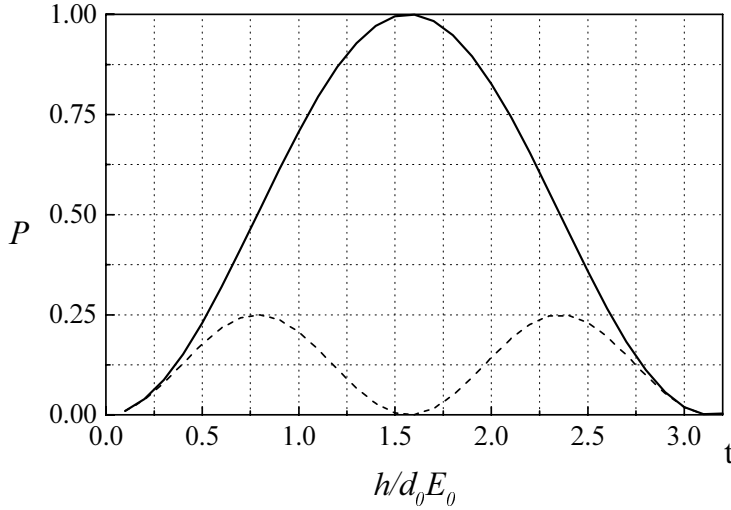
Эта формула показывает, что квантовая система под действием резонансного возмущения $(\omega \rightarrow \omega_0, \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega)$ периодически переходит с нижнего уровня на верхний и обратно. Время перехода (из min в max), согласно (8.16), составляет:

$$\frac{t\Omega}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow t_\pi = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi\hbar}{d_0 E_0}. \quad (8.18)$$

Формула Раби дает рецепт приготовления двухуровневой системы в заданном состоянии. Например, для перевода системы из основного в когерент-

ное состояние необходимо подействовать на нее т.н. “ $\pi/2$ ”-импульсом, когда

$$\frac{t\Omega}{2} = \frac{\pi}{4} \rightarrow t_{\pi/2} = \frac{\pi}{2\Omega} = \frac{\pi\hbar}{2d_0E_0}.$$



Пунктиром отложена зависимость вероятности перехода от времени в нерезонансном случае, когда $\omega - \omega_0 = \sqrt{3}\Omega$.

Таким образом, данный атом при $t_0 \equiv 0$ готовится в заданном состоянии -- аналогично фальшивой игральной кости или монете. В дальнейшем состоянии эволюционирует в соответствии с уравнением Шредингера: $|\psi_0\rangle = a|g\rangle + b|e\rangle \exp(-i\omega_0 t)$, где ω_0 -- боровская частота перехода.

Отметим, что описанная процедура *приготовления* не является *измерением* чего либо, так что эти процедуры не эквивалентны, как это часто полагают. Существенным допущением явилось классическое описание лазерного поля, которое играет роль заданной внешней силы, действующей на атом. Как и при описании измерения, на стадии приготовления необходимо "рукой" установить разумную границу между классическим и квантовым мирами.

До сих пор мы пренебрегали взаимодействием атома с невозбужденными, вакуумными модами поля, что допустимо в случае достаточно короткого лазерного импульса. Учет этого взаимодействия приведет к спонтанному излучению фотона (точнее, экспоненциального волнового пакета со средней частотой ω_e и длительностью t_e) - *релаксации*. Отображающая состояние точка на сфере Блоха движется по спирали от одного полюса к другому. Спустя время, много большее t_e атом с большой вероятностью оказывается в основном состоянии, а поле -- в однофотонном состоянии. Таким образом, наша модель дает также пример процедуры приготовления поля в определенном состоянии.

Итак, современная техника позволяет готовить достаточно надежно определенные состояния атомов и поля. Как уже отмечалось, эта техника привлекает сейчас большое внимание в связи с идеей квантового компьютера.

Существует целый класс эффектов, позволяющих говорить о фазе волновой функции, относящейся к индивидуальной частице. Такие эксперименты по-

звонят говорить об операциональном смысле ВФ отдельного квантового объекта. На прошлой лекции мы рассматривали воздействие двух ЛЭ Адамара на двухуровневую систему - кубит. Мы показали, что управляя относительной фазой можно перенаправить частицу из одного плеча в другой. В основе этого эффекта лежит явление квантовой интерференции. Другими словами, по желанию экспериментатора амплитуду ВФ в том или ином выходном плече можно обратить в нуль. Следовательно, манипулируя задержкой мы управляем волновой функцией.

Интерферометр $HP(\theta)H$ действует как унитарный преобразователь. При этом чистое состояние преобразуется в чистое состояние.

Итак полную информацию об измеримых статистических свойствах (в данный момент времени) дает вектор состояния в каком-то представлении. Например, в координатном представлении $\langle x|\psi\rangle \equiv \psi(x)$. Другими словами, оператор координаты \hat{X} в единственном числе составляет полный набор операторов, необходимых для задания состояния. То же можно сказать и об импульсе $\hbar\hat{K}$ - состояние можно задать вектором состояния в импульсном представлении $\langle k|\psi\rangle \equiv \psi(k)$ или фурье-образом $\psi(x)$.

Замечание. Оператор энергии $\hat{H} = \hat{K}^2/2m$ не образует полного набора, поскольку оставляет неопределенным знак импульса (зависит от его квадрата).

Для задания чистого состояния достаточно указать собственные значения всех операторов полного набора. Например, если известно, что $k = k_1$, то волновая функция полностью определена:

$\psi(x) = \exp\{ik_1x\}$. Если спектр операторов дискретный, то состояние задается набором квантовых чисел (для двухуровневой системы $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ - это пара комплексных чисел α и β).

Для измерения чистого состояния необходимо произвести многократное измерение (например, координаты) с помощью идеального детектора. При этом измеряется лишь модуль волновой функции - ее огибающая $|\psi(x)|$. Фаза волновой функции непосредственно не наблюдаема. Значит нужно производить дополнительные измерения (хотя оператор \hat{X} и представляет полный набор). Например, можно измерить огибающую волновой функции в импульсном представлении $|\psi(k)|$